Ce premier cours de l'année a pour rôle de souligner l'importance des unités en Sciences Physiques qui donnent une structure précise à toutes les formules littérales. Par ailleurs, nous verrons aussi comment l'étude des propriétés de symétrie de certains systèmes peut donner des résultats qualitatifs sur leurs propriétés.

Table des matières

1 Unités et dimensions **1**
1.1 Le système international d'unités (système SI) 1
1.2 Notion de dimension 2
1.3 Homogénéité d'un résultat littéral 3
1.4 Règles d'homogénéité 3
1.5 Retrouver la dimension d'une grandeur 4
1.6 Analyse dimensionnelle 4
1.6.1 Théorème Π de Vaschy-Buckingam 4
1.6.2 Exemples d'application 5
1.6.3 Lois d'échelle 9
1.6.4 Analyse dimensionnelle avec Maple 11

2 Symétries **12**
2.1 Symétries, transformations, invariances 12
2.2 Le principe de symétrie 13
2.3 Exemples d'application du principe de Curie 13
2.3.1 La symétrie des formules 13
2.3.2 Plans de symétrie et d'antisymétrie 14

1 Unités et dimensions

Les Sciences Physiques font appel à des grandeurs qui peuvent être mesurées ou repérées. À ces grandeurs physiques peut être associée une valeur numérique qui en traduit l'intensité. Mais il est une caractéristique essentielle d'une grandeur physique : son unité, qui en précise la nature.

1.1 Le système international d'unités (système SI)

Toutes les unités n'ont pas le même statut. Certaines ont été choisies comme fondamentales. Par conséquent, toutes les autres unités peuvent s'exprimer comme une combinaison des unités fondamentales (sous la forme d'une multiplication d'unités).
Le système fondamental contient 7 unités de base :

Nom	Symbole	Unité de...
mètre	m	longueur
kilogramme	kg	masse
seconde	s	temps
Ampère	A	intensité du courant électrique
Kelvin	K	température
candela	cd	intensité lumineuse
mole	mol	quantité de matière

Les définitions des unités ont évolué au cours du temps au fur et à mesure que les progrès scientifiques permettaient d'obtenir des mesures de précision croissante. Ainsi, la seconde est définie aujourd'hui comme valant «9192631770 périodes de l'onde émise par un atome de césium 133 subissant une transition dipolaire magnétique correspondant à une raie de la structure hyperfine du spectre de cet atome». Cette définition moderne fait appel à la fois à la mécanique quantique, à des effets de relativité restreinte et au magnétisme nucléaire !
Auparavant, la seconde était définie à partir de la durée du jour : l'alternance des jours et des nuits apparaissait alors comme un phénomène d'une régularité exemplaire. Cette définition de la seconde souligne le caractère arbitraire d'une unité de mesure. Ceci explique pourquoi tout le monde n'utilise pas les mêmes unités : citons par exemple les unités couramment utilisées par les anglo-saxons (mile, yard [1]...). Il est donc important de disposer d'unités officielles à l'échelle internationale pour assurer la bonne communication des scientifiques. C'est la vocation du système international d'unités.

1.2 Notion de dimension

Chacune des unités est rattachée à une grandeur physique mesurable qui définit sa nature. On l'appelle **dimension**. Pour autant, il ne faut pas confondre unité et dimension. Par exemple, le mètre est rattaché à la dimension longueur, tout comme le yard ou le mile marin.

Exemple :

$$i = \frac{Q}{\Delta t}$$

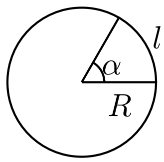
- i : intensité électrique, s'exprime en ampères. On écrit $[i] = I$. Le symbole I désigne la dimension intensité électrique. L'écriture $[i] = I$ est une **équation aux dimensions** : elle exprime que la dimension de la grandeur désignée par le symbole i est une intensité électrique.
- Q : la charge électrique, se mesure en coulombs (symbole C).
- Δt : une durée, se mesure en secondes (symbole s).
- La relation $i = \frac{Q}{\Delta t}$ s'écrit aussi $Q = i\Delta t$. On en déduit qu'une charge électrique **est homogène** au produit d'une intensité électrique par une durée. On écrit l'équation aux dimensions suivante pour traduire cette propriété : $[Q] = IT$ où T représente la dimension temps.

[1] qui correspond à la hauteur réglementaire de filet de tennis en son milieu.

Retenons le principe fondamental suivant : en physique, on ne compare que des grandeurs homogènes, c'est-à-dire dont les dimensions sont égales.

Cas particulier :

Certaines grandeurs, bien qu'ayant une unité, sont sans dimension : ce sont en fait des nombres purs au sens mathématique. C'est le cas du radian (symbole rad) qui est une unité sans dimension.



On a par définition $\alpha = \frac{l}{R}$. Dans cette expression, la valeur de α est obtenue en radians si l et R sont exprimés en mètres (ou dans une unité multiple du mètre). L'angle α apparaît comme le rapport de deux longueurs ; il est donc sans dimension.

1.3 Homogénéité d'un résultat littéral

Par souci de clarté, on doit conduire tous les calculs sous forme littérale en conservant les symboles des différentes grandeurs physiques. On ne réalise d'application numérique que lorsque le calcul littéral est terminé. Ceci permet de juger l'homogénéité d'une formule. Il faut en effet se rappeler le principe suivant :

Toutrsultatnonhomogneestncessairementfaux.

Par contre, un résultat homogène n'est pas forcément le bon…

Exemples :

	x	$=$	$\frac{1}{2}gt^2$	$+$	v_0t
dimension :	longueur		accélération $\times$ temps^2		vitesse $\times$ temps
unité :	m		$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\times\mathrm{s}^2=\mathrm{m}$		$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\times\mathrm{s}=\mathrm{m}$

	i	$=$	I_0	$\sqrt{2}$	$\exp\left(-\alpha t\right)$	$\cos\left(\omega t+\varphi\right)$
dimension :	I		I	1	1	1
unité :	A		A	sans unité	sans unité	sans unité

Notons que pour cet exemple, l'argument αt de l'exponentielle est nécessairement sans dimension car il est impossible de définir la nature physique de l'exponentielle d'une durée : quelle unité associerait-on à une telle grandeur ? Puisque t est homogène à un temps, on en déduit que α est homogène à l'inverse d'un temps et s'exprime en s^{-1}. De même, l'argument du cosinus est nécessairement sans dimension : il s'agit en fait d'un angle qui s'exprime en radians (on a vu que le radian est sans dimension). Par conséquent, ω ne peut que s'exprimer en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$: il s'agit d'une pulsation.

Enfin, noter que la dimension d'une quantité sans dimension est conventionnellement notée à l'aide du chiffre 1.

Si par exemple, $I = 2$ A, on n'écrit surtout pas

$$i = 2\sqrt{2}\exp\left(-\alpha t\right)\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

car cette expression n'est plus homogène !

1.4 Règles d'homogénéité

- On ne peut additionner que des termes homogènes ;
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante (exp, ln, cos, sin, tan...) est nécessairement sans dimension ;
- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique ;
- Un vecteur ne peut être ajouté qu'à un vecteur et non à un scalaire.

1.5 Retrouver la dimension d'une grandeur

Certaines grandeurs (en particulier les grandeurs correspondant aux unités de base) ont des dimensions évidentes. Pour les cas plus complexes, on doit pouvoir retrouver la dimension d'une grandeur physique à partir de lois physiques élémentaires.

Exemple :

Quelle est la dimension d'une résistance électrique ? Autrement dit : comment se décompose l'unité de résistance électrique (l'ohm, symbole Ω) en fonction des unités de base ?

On utilise par exemple la formule $P = Ri^2$ où P, R et i désignent respectivement une puissance, une résistance et une intensité électriques. Comme l'intensité électrique est une dimension de base, le problème revient à chercher la dimension d'une puissance en fonction des dimensions de base.

En mécanique, on sait que : $P = Fv$ où F et v désignent respectivement une force et une vitesse, et que par ailleurs, la force est homogène au produit d'une masse par une accélération (*cf.* seconde loi de Newton). On écrit donc :

$$[F] = M \times L \cdot T^{-2}.$$

Comme $[v] = L \cdot T^{-1}$, on a $[P] = ML^2T^{-3}$. D'où l'on tire $[R] = ML^2T^{-3} \times I^{-2}$. On peut donc écrire la conversion suivante : $1\ \Omega = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$.

1.6 Analyse dimensionnelle

L'utilisation des dimensions permet de savoir si une expression littérale est homogène ou non. Cela permet de rechercher d'éventuelles erreurs. Mais l'analyse des dimensions ou analyse dimensionnelle permet de retrouver, de deviner des lois physiques lorsque la résolution théorique est trop complexe.

Supposons qu'une loi physique s'écrive sous la forme $a = f(x, y, z)$: la grandeur a est fonction des grandeurs (dimensionnées) x, y et z qui sont supposées indépendantes (c'est-à-dire que l'on ne peut pas mesurer l'une d'entre elles en fonction des unités des deux autres). On suppose en outre que la loi physique étudiée peut s'exprimer sous la forme mathématique d'un produit. Il existe alors trois nombres réels α, β et γ tels que :

$$a = Cx^\alpha y^\beta z^\gamma$$

où C est une constante sans dimension. On peut encore écrire :

$$\frac{a}{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = C = \text{nombre sans dimension}$$

Rechercher une loi physique reviendra à rechercher des nombres sans dimension.

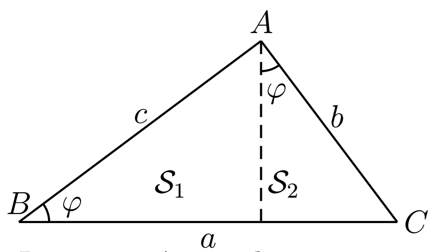
1.6.1 Théorème Π de Vaschy-Buckingam

Soit une loi physique entre n variables : $a_0 = f(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ avec k dimensions indépendantes, alors on peut exprimer cette loi sous la forme d'une relation entre $n - k$ nombres sans dimension :

$$C_0 = g\left(C_1, \cdots, C_{n-k-1}\right)$$

1.6.2 Exemples d'application

- *Théorème de Pythagore*



La figure ci-contre représente un trinagle rectangle ABC (l'angle droit étant au sommet A). Ce triangle est en fait complètement défini par la donnée de a et de φ. La surface $\mathcal{S}$ est donc fonction de a et de φ : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, \varphi)$.

Les paramètres physiques sont : S, a et φ : $n = 3$.

  - surface $\mathcal{S}$: $[\mathcal{S}] = L^2$;
  - longueur a : $[a] = L$;
  - angle φ : $[\varphi] = 1$.

On a 3 paramètres physiques pour 1 dimension indépendante : $n = 3$ et $k = 1$. On peut donc former $n - k = 3 - 1 = 2$ nombres sans dimension. L'un d'entre eux est évident, il s'agit de φ ; l'autre est $\frac{\mathcal{S}}{a^2}$ (ce choix n'est pas le seul possible puisque $\frac{a^2}{\mathcal{S}}$ est aussi un nombre sans dimension). Le théorème Π assure qu'il existe une fonction g telle que :

$$\frac{\mathcal{S}}{a^2} = g(\varphi),$$

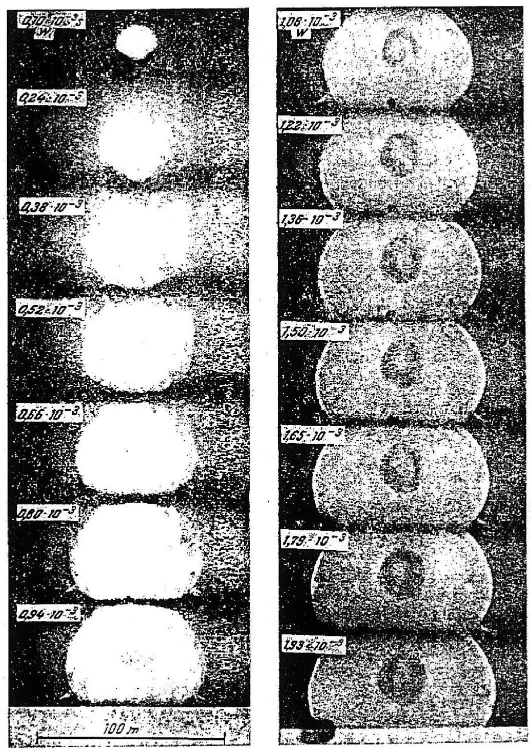
soit $\mathcal{S} = a^2 g(\varphi)$. De la même manière, on obtient les relations suivantes : $\mathcal{S}_1 = c^2 g(\varphi)$ et $\mathcal{S}_2 = b^2 g(\varphi)$. Il s'agit chaque fois de la même fonction g qui est une fonction universelle dans le sens où elle est commune à tous les triangles rectangles.

Comme $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$, on a $a^2 g(\varphi) = c^2 g(\varphi) + b^2 g(\varphi)$. La fontion g étant non nulle puisque que l'aire de chaque triangle considéré est non nulle, on trouve en divisant par $g(\varphi)$ la célèbre formule de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$.

Si l'analyse dimensionnelle s'avère suffisante pour retrouver cette relation, elle ne livre pas explicitement la fonction g. Un calcul mathématique complet est nécessaire pour trouver que $g(\varphi) = \frac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi)$. On constate que la quantité $g(\varphi)$ est adimensionnée (*i.e.* sans dimension).

- *Explosion atomique*

Ce célèbre exemple est dû au physicien G.I. Taylor. À partir du film de la première explosion atomique (*cf.* ci-dessous), il parvint à estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de cette bombe, valeur qui était à cette époque *top-secret* !



Taylor fit l'hypothèse que le rayon $R(t)$ du «nuage» consécutif à l'explosion ne dépend que de l'énergie E libérée par l'explosion et de la masse volumique μ de l'air. Retrouvons ses résultats par analyse dimensionnelle. Les paramètres physiques sont :

– l'énergie de l'explosion E :

$$[E] = ML^2T^{-2}$$

– le rayon du nuage R : $[R] = L$

– le temps t : $[t] = T$

– la masse volumique de l'air μ :

$$[\mu] = ML^{-3}$$

On a donc 4 paramètres physiques pour 3 dimensions indépendantes ; on peut donc former 4-3=1 nombre sans dimension. Posons :

$$E^\alpha R^\beta t^\gamma \mu^\delta = C = \text{nombre sans dimension.}$$

Il faut trouver des valeurs possibles des quatre exposants α, β, γ et δ. L'équation aux dimensions correspondante s'écrit :

$$M^\alpha L^{2\alpha} T^{-2\alpha} \cdot L^\beta \cdot T^\gamma \cdot M^\delta L^{-3\delta} = 1,$$

soit :

$$M^{\alpha+\delta} L^{2\alpha+\beta-3\delta} T^{\gamma-2\alpha} = 1,$$

d'où, puisque les trois dimensions sont indépendantes :

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 3\delta = 0 \\ \gamma - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = 5\delta \\ \gamma = 2\alpha = -2\delta \end{cases}$$

On obtient donc : $E^{-\delta} R^{5\delta} t^{-2\delta} \mu^{\delta} = C$, soit : $(E^{-1} R^5 t^{-2} \mu)^{\delta} = (K)^{\delta}$ à condition de définir la constante K de telle sorte que $K^{\delta} = C$. Finalement, il vient : $E^{-1} R^5 t^{-2} \mu = K$ et on en déduit :

$$R(t) = K^{1/5} \left(\frac{E}{\mu} \right)^{1/5} t^{2/5}$$

Remarque :

Lorsqu'on fait un raisonnement en analyse dimensionnelle, il reste toujours une constante sans dimension dont on ne connaît pas la valeur numérique. Malgré tout, lorsque les paramètres choisis sont pertinents, il se trouve que la constante numérique qui reste est bien souvent d'ordre de grandeur voisin de l'unité.

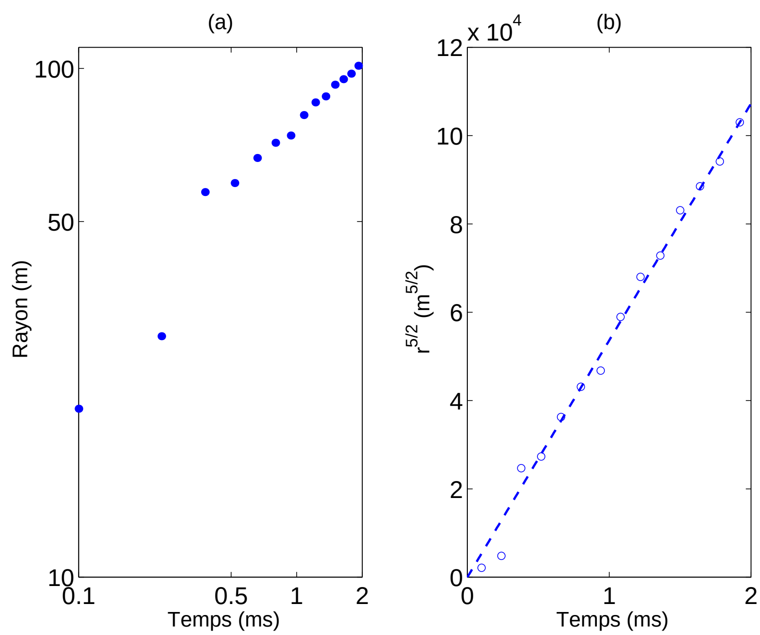


Fig.1 :

La figure ci-dessus montre une exploitation numérique des photographies de l'explosion. Sur la figure (a), on présente un tracé du rayon en fonction du temps en échelle logarithmique. Hormis pour les deux premiers points, on observe un alignement correct des points, ce qui suggère l'existence d'une loi de puissance liant $R(t)$ et t. Le second graphe présente $[R(t)]^{5/2}$ en fonction du temps t. On obtient une droite passant l'origine, ce qui est compatible avec la loi $R(t) \propto t^{2/5}$ trouvée par analyse dimensionnelle. Comme quoi, de simples arguments peuvent venir à bout d'un problème ardu !

- *Troisième loi de Képler*

  On se propose de retrouver par analyse dimensionnelle une des trois lois que Képler a énoncé en 1619 : le carré de la durée d'une révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de l'orbite elliptique de cette planète. Les paramètres physiques à considérer sont : la masse m de la planète étudiée, disons la Terre, la masse m_S du Soleil, le demi-grand axe a de l'orbite, la période de révolution T et la constante de gravitation universelle G puisqu'il s'agit d'un problème de gravitation. Commençons par déterminer la dimension de la constante de gravitation en utilisant l'expression de la force d'interaction gravitationnelle : $F = \frac{Gm_Sm}{a^2}$. Connaissant la dimension de la force, homogène au produit d'une masse et d'une accélération, $[F] = MLT^{-2}$, on en déduit que : $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. Récapitulons :

  - demi-grand axe a : $[a] = L$;
  - masse de la Terre m : $[m] = M$;
  - masse du Soleil m_S : $[m_S] = M$;
  - période de révolution T : $[T] = T$;
  - constante de gravitation universelle G : $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$.

  On a donc 5 paramètres physiques pour 3 dimensions indépendantes, on peut donc former 5-3=2 nombres sans dimension. L'un d'entre eux est évident : $C_1 = \frac{m}{m_S}$. On recherche l'autre à l'aide des 4 paramètres a, T, G et m_S (on aurait pu choisir m plutôt que m_S).

  On écrit donc : $a^\alpha m_S^\beta T^\gamma G^\delta = C_2$, soit :

  $$L^\alpha M^\beta T^\gamma M^{-\delta} L^{3\delta} T^{-2\delta} = 1,$$

  d'où

  $$\begin{cases} \alpha + 3\delta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ \gamma - 2\delta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 2\delta \end{cases}$$

  soit : $a^{-3\delta} m_S^\delta T^{2\delta} G^\delta = C_2 = K^\delta$, d'où :

  $$a^{-3} m_S T^2 G = K = \text{nombre sans dimension.}$$

  On écrit : $K = f(C_1)$, soit $Gm_S\frac{T^2}{a^3} = f\left(\frac{m}{m_S}\right)$. On retrouve bien la troisième loi de Képler.

  Remarque :

  La fonction f n'est pas donnée par cette analyse. Un calcul théorique donne $f\left(\frac{m}{m_S}\right) = 4\pi^2\frac{1}{1+\frac{m}{m_S}}$.

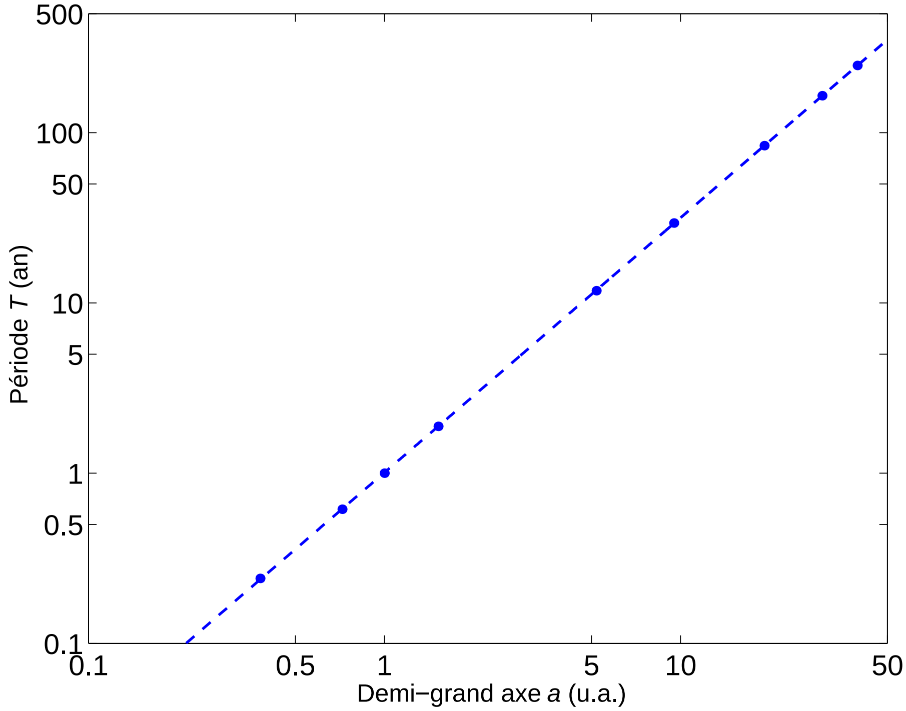


Fig.2 :

On a représenté sur la figure ci-dessus la période de révolution T en fonction du demi-grand axe a pour les planètes du système solaire en échelle logarithmique. On constate un alignement des points selon une droite (représentée en pointillés), ce qui indique l'existence d'une loi de puissance liant T et a. La pente de la droite en pointillés peut être estimée à $1,496$, à comparer à la valeur $3/2$ prévue par la théorie newtonienne.

1.6.3 Lois d'échelle

Une loi d'échelle est une loi décrivant les variations d'une grandeur donnée en fonction d'une autre pour des ordres de grandeur variés de cette dernière. En général, une loi d'échelle a la forme mathématique d'une loi de puissance caractérisée par un exposant caractéristique. Prenons divers exemples pour illustrer cette notion.

Exemples :

- Il n'est pas rare de rencontrer dans la littérature pour enfants des géants tels Gulliver. Pourtant, les lois de la physique interdisent leur existence. Nous allons le montrer en comparant un homme et un géant dix fois plus haut, exactement homothétique de l'homme, c'est-à-dire que toutes ses dimensions L sont multipliées par 10 : le facteur 10 est ici un facteur d'échelle. Le géant est donc caractérisé par une seule longueur caractéristique L. La force des membres du géant est proportionnelle à la surface de leur section [2], donc au carré L^2 des dimensions du géant.

[2] Un muscle est constitué de fibres et on imagine assez facilement que la force qu'un tel muscle peut développer est proportionnelle au nombre de fibres, c'est-à-dire à la section du muscle.

Cependant, son poids est proportionnel à son volume et varie donc proportionnellement à L^3. Tout ceci signifie que le poids du géant est 1000 fois supérieur à celui de l'homme alors que sa force n'est que 100 fois supérieure. Donc, pour un géant, supporter son propre poids est équivalent, pour un homme normal, à supporter le poids de 9 de ses congénères en plus du sien. Concluons donc qu'un géant homothétique de l'homme s'effondrerait sous son propre poids.

Cette loi d'échelle permet de comprendre pourquoi les animaux ne sont pas tous homothétiques les uns des autres ; on dit qu'ils ne sont pas invariants d'échelle. Plus un animal est petit et plus ses membres peuvent être fins (penser aux insectes) alors que les animaux les plus grands et massifs ont des membres très larges afin de soutenir leur poids (penser aux éléphants).

- Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que pour une explosion atomique, l'on avait : $R(t) \propto \left(\frac{E}{\mu}\right)^{1/5} t^{2/5}$. Cette loi est une loi d'échelle qui donne la valeur du rayon du nuage à diverses échelles temporelles (de $t = 0$ à $t \to \infty$). Cette loi d'échelle est associée à l'exposant caractéristique 2/5. On peut considérer que l'expression donnant R est aussi une loi d'échelle relative aux variations du rayon en fonction de l'énergie E de l'explosion (l'exposant caractéristique associé est 1/5).
- Un exemple culinaire. Nous nous souvenons que l'an passé, notre dinde de Noël pesait 2,5 kg et était cuite à point au bout d'une heure et trente minutes ; mais, cette année, nous disposons d'un volatile de 3,5 kg. Comment choisir le temps de cuisson pour parvenir au même degré de cuisson que l'an passé ? La question qui se pose peut être reformulée ainsi : comment le temps de cuisson varie-t-il avec la taille, ou la masse, de la dinde ?

  De plus que signifie «cuite à point» ? Probablement qu'en un point le plus éloigné de la surface de la dinde, la température atteint une certaine valeur. Notre problème est donc lié à la conduction de la chaleur. Les paramètres physiques à retenir sont :

  - la diffusivité thermique D qui s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$: $[D] = L^2T^{-1}$;
  - la masse volumique μ de la dinde : $[\mu] = ML^{-3}$;
  - la masse m de la dinde : $[m] = M$;
  - le temps t : $[t] = T$.

  On peut être surpris de ne pas voir figurer la température dans cette liste. On cherche en effet un temps caractéristique du système physique que constitue la dinde. La température est une consigne extérieure à laquelle répond ce système. Le temps caractéristique cherché qui définit la réponse de ce sytème à cette contrainte extérieure ne dépend que des propriétés physiques du système, de même que le temps de montée de la tension dans un dipôle RC ne dépend pas de l'échelon de tension auquel ce dipôle est soumis mais seulement des propriétés physiques propres à ce dipôle.

On a donc 4 paramètres physiques pour 3 dimensions indépendantes, soit la possibilité de former 4-3=1 nombre sans dimension.
On cherche donc : $D^\alpha \mu^\beta m^\gamma t^\delta = C$, soit :

$$L^{2\alpha} T^{-\alpha} M^\beta L^{-3\beta} M^\gamma T^\delta = 1,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 3\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \delta = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{2}{3}\delta \\ \gamma = -\frac{2}{3}\delta \\ \alpha = \delta \end{array} \right.$$

donc : $D^\delta \mu^{2/3\delta} m^{-2/3\delta} t^\delta = C = K^\delta$, d'où :

$$t = \frac{K}{\mu^{2/3} D} m^{2/3}.$$

On obtient une définition unique du temps caractéristique du système étudié. Le temps de cuisson, si difficile à définir précisément, ne peut qu'être proportionnel au temps caractéristique trouvé. De plus, nous obtenons la loi d'échelle qui relie ce temps à la masse m.
En supposant que μ, D, ainsi que K, gardent des valeurs similaires pour toutes les dindes (sic !), on a : $t_1 m_1^{-2/3} = t_2 m_2^{-2/3}$, d'où $t_2 = t_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3}$.
L'application numérique, pour $m_1 = 2,5$ kg, $m_2 = 3,5$ kg et $t_1 = 1,5$ h, donne $t_2 = 1,88$ h, soit quasiment 2 heures.

1.6.4 Analyse dimensionnelle avec Maple

Le package *anadim*, réalisé par Eddie Saudrais, permet de faire de l'analyse dimensionnelle avec une efficacité remarquable. L'exemple suivant montre comment on peut rechercher des lois par analyse dimensionnelle avec Maple :

```
> restart:  with(anadim):
```

anadim version 1.3 par Eddie Saudrais 1999

?anadim pour obtenir des informations sur ce package

```
> loi(D=diffusivite_thermique,mu=masse_volumique,m=masse,t=temps,t);
```

$$t = Cste \cdot \left(\frac{m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{D\mu^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \right)$$

On peut aussi tester l'homogénéité de certaines expressions :

```
> eqdim(m=masse,a=longueur,T=temps,T^2/a^3=4*Pi^2/(_G*m));
```

Égalité homogène

$$\frac{T^2}{L^3}$$

```
> eqdim(m=masse,a=longueur,T=temps,T^2/a^3=4*Pi^2*(_G*m));
```

Égalité non homogène

Impossible de déterminer l'équation aux dimensions demandée

Autant dire que si vous faites des erreurs d'homogénéités dans vos calculs, vous n'avez plus d'excuses. . .

2 Symétries

Le mot symétrie vient du grec *σύν* (avec) *μέτρον* (mesure) : symétrie = juste mesure.
La notion de symétrie, au sens géométrique du terme, s'est aussi imposée à nos sens par l'examen de la nature. Dans notre civilisation, la symétrie s'est retrouvée associée à l'idée d'harmonie.

- *Les symétries dans la nature*
  - symétrie bilatérale des insectes, poissons et mammifères ;
  - symétrie de rotation discrète des formes cristallines, des pétales de fleurs ;
  - symétrie de rotation continue des disques solaires ou lunaires ;
  - symétrie de translation discrète des nids d'abeille ;
  - symétrie de translation continue de la surface plane et calme d'un lac ;
- *Les symétries dans l'œuvre humaine*
  - en architecture : colonnades, pyramides, cathédrales, pavages ;
  - en artisanat : la roue ;
  - en ornement : les jardins à la française, les bijoux ;
  - les symboles tels la croix ou le ying-yang.
- *Les symétries en sciences*
  - en mathématiques : transformations géométriques ;
  - chimie/biologie : la chiralité des molécules ;
  - physique : la cristallographie et de nombreux autres exemples que nous allons découvrir et commenter tout au long de l'année.

2.1 Symétries, transformations, invariances

On dit qu'un objet est symétrique s'il est appliqué sur lui-même quand on effectue une certaine transformation.
On dit alors que cet objet est invariant relativement à cette transformation :

$$\text{Objet} \xrightarrow{\quad\text{Transformation}\quad} \text{Même objet}$$

En physique, la question qui se pose couramment est la suivante :

$$\text{Expérience} \xrightarrow{\quad\text{Transformation}\quad} \begin{array}{c}\text{Même expérience ou}\\ \\ \text{expérience différente ?}\end{array}$$

Grâce à un principe général de symétrie, on compare l'expérience initiale avec l'expérience transformée et l'on aboutit à une conclusion de nature qualitative, du type : n'existe pas, peut exister, est nul, peut être non nul.

2.2 Le principe de symétrie

Énoncé de Pierre Curie paru dans le Journal de Physique, vol. 3, page 395 en 1894 :

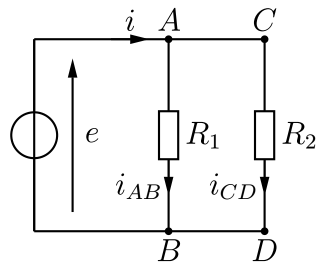
> «Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes.»

Par «cause», Curie entend problème ou système. L'«effet» est la solution du problème ou la propriété du système. Néanmoins, le second point de cet énoncé omet le cas où l'«effet» est moins symétrique que la «cause» : c'est le cas de systèmes dont le comportement peut donner lieu à une «brisure de symétrie» : nous en verrons un exemple en TP.

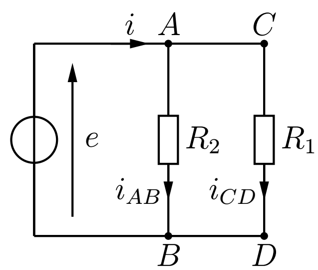
2.3 Exemples d'application du principe de Curie

2.3.1 La symétrie des formules

Considérons le système suivant :



On envisage le comportement de ce système lorsqu'on effectue la transformation suivante : on échange les résistances R_1 et R_2. Autrement dit, on connecte R_1 entre C et D et R_2 entre A et B. On obtient alors le circuit représenté ci-après.



On constate que cette transformation laisse le circuit globalement invariant : le générateur est connecté aux résistances R_1 et R_2 associées en parallèle. Par conséquent, en vertu du principe de Curie, l'intensité totale i circulant dans le circuit doit rester invariante lors de cette transformation.

Or un calcul montre que pour le circuit dans son état initial, on a :

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) e.$$

Échangeons R_1 et R_2 dans cette expression. On obtient :

$$i = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) e.$$

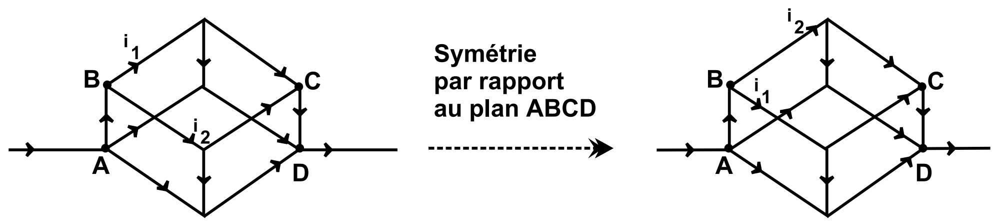
C'est exactement la même expression de i ! On conclut que la formule donnant i reflète une propriété de symétrie particulière du circuit global : l'invariance par échange des résistances R_1 et R_2.

Remarque :

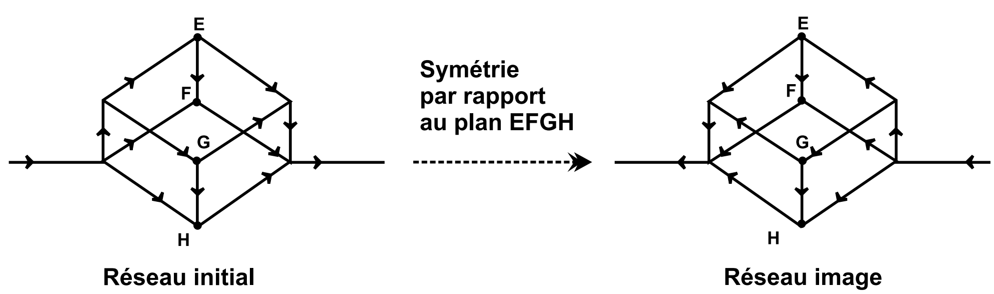
La transformation envisagée laisse le circuit global invariant mais pas la branche AB par exemple puisqu'initialement, elle contient la résistance R_1 alors qu'après la transformation elle contient la résistance R_2. Par conséquent, il n'y a aucune raison (de symétrie) pour que la formule donnant i_{AB} en fonction de R_1, R_2 et e reste invariante par échange de R_1 et R_2. Un calcul montre en effet que pour le système initial $i_{AB} = \frac{e}{R_1}$: cette expression n'est manifestement pas invariante lorsqu'on échange R_1 et R_2.

2.3.2 Plans de symétrie et d'antisymétrie

Étudions les propriétés de symétrie d'un réseau ohmique afin d'en déduire des informations sur l'intensité électrique circulant dans chacune des branches de résistance électrique R. Sur la figure ci-après, on a représenté ce réseau ohmique ainsi que son image après une opération de symétrie par rapport à un plan défini sur la figure.



Quel sens donner à l'expérience de physique obtenue par cette transformation géométrique du réseau initial ? On constate en fait, qu'il s'agit de la même expérience : les deux réseaux obtenus sont superposables. On en déduit que les intensités circulant dans des branches symétriques par rapport au plan $(ABCD)$ sont nécessairement égales : c'est le cas des intensités i_1 et i_2 représentées sur la figure.
En conclusion, nous dirons que le réseau possède un plan de symétrie (c'est le plan $(ABCD)$) puisque par symétrie par rapport à ce plan il reste invariant. Conformément au principe de Curie, on retrouve cette propriété de symétrie pour les intensités circulant dans les branches symétriques. Le plan $(ABCD)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant.
La propriété de symétrie que nous venons d'étudier pour ce réseau n'est pas la seule. Il en existe une autre plus subtile. Sur la figure ci-après, on a représenté le réseau initial ainsi que son image après une opération de symétrie par rapport au plan $(EFGH)$ défini dans la figure ci-après :

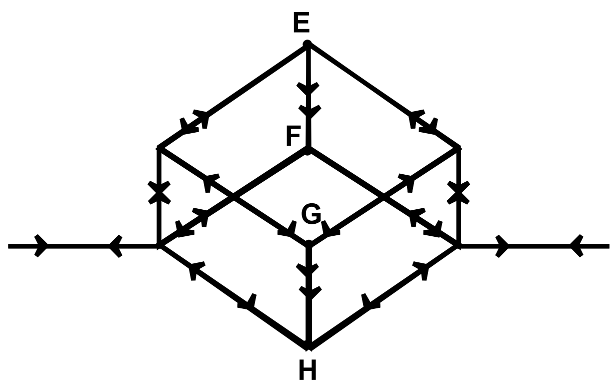


L'image du réseau constitue une nouvelle expérience dont on se rend vite compte qu'elle a un lien avec l'expérience initiale. En effet, le réseau image peut être vu comme étant le

réseau initial dans lequel on a inversé le sens de parcours du courant : au lieu d'aller de gauche à droite, il irait de droite à gauche.
On peut donc superposer l'expérience initiale et l'expérience transformée si l'on inverse le sens du courant dans chacune des branches de l'expérience transformée, ce que l'on résume ainsi (on note S^* l'opération de symétrie par rapport au plan $(EFGH)$ et I l'opération qui consiste à inverser le sens de l'intensité dans chaque branche) :

$$\text{Réseau initial} \xrightarrow{S^*} \text{Réseau image} \xrightarrow{\text{I}} \text{Réseau initial}$$

Lorsqu'on superpose le réseau initial et le réseau image, on constate que les branches EF et GH ont un comportement singulier : le courant change de sens dans toutes les branches hormis EF et GH.



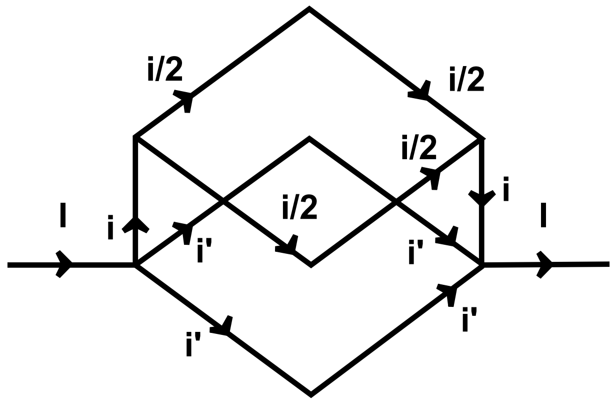
Le seul nombre à la fois égal et opposé à lui-même étant 0, on en déduit que l'intensité est nulle dans ces deux branches. On a aussi que l'intensité dans deux branches symétriques par rapport au plan $(EFGH)$ est la même. Tout ceci peut se justifier simplement en appliquant successivement les opérations S^* et I afin de voir comment se transforment les intensités :

$$i_{EF} \xrightarrow{S^*} i_{EF} \xrightarrow{\text{I}} -i_{EF}$$

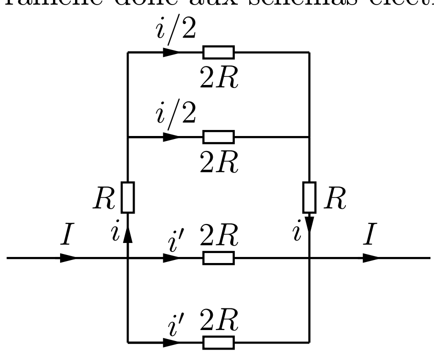
On conclut immédiatement : $i_{EF} = -i_{EF}$ implique $i_{EF} = 0$. Il en va de même pour la branche GH.
Notons i_1 et i_2 les intensités circulant dans des branches symétriques par rapport au plan $(EFGH)$ (c'est le cas des branches BG et GC par exemple).

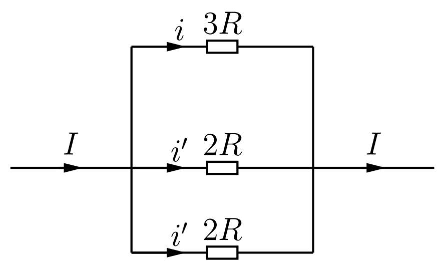
$$i_1 \xrightarrow{S^*} -i_2 \xrightarrow{\text{I}} i_2$$

On conclut que $i_1 = i_2$.
En somme, le plan $(EFGH)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant dans le réseau : en effet, une opération de symétrie par rapport à ce plan inverse le sens du courant dans chaque branche. Cette propriété de symétrie du système a en particulier pour conséquence la nullité de l'intensité du courant dans les deux branches contenues dans le plan d'antisymétrie, conformément au principe de Curie.
En définitive, l'examen des propriétés de symétrie donne des renseignements précieux qui permettent de calculer simplement l'intensité circulant dans chaque branche. On a représenté ci-après ce réseau ohmique en utilisant les résultats obtenus par examen des propriétés de symétrie ; en particulier on a supprimé les branches où l'intensité est nulle.

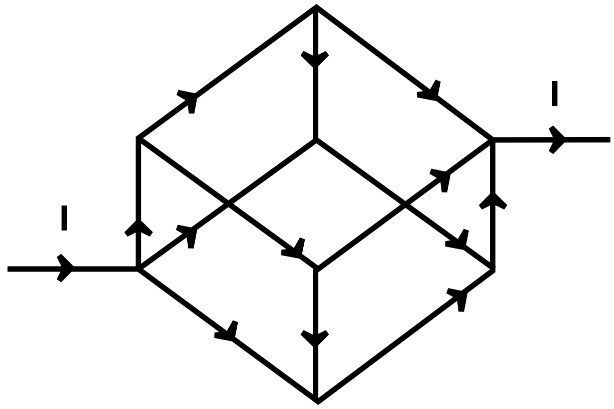


On se ramène donc aux schémas électriques équivalents suivants :





On en tire les résultats suivants : $i = I/4$ et $i' = \frac{3}{8}I$. Il faut retenir de cette étude l'importance que l'examen des propriétés de symétrie peut jouer dans l'analyse d'un problème. Nous retrouverons ce type de discussion en électrostatique par exemple.
Nous laissons le lecteur réfléchir à la situation suivante, dérivée de celle que nous venons d'étudier. Quelles sont les similitudes et les analogies avec la situation précédemment étudiée ? Existe-t-il des branches où l'intensité est nulle ? Que vaut l'intensité dans chacune des branches ?


I
I