INTRODUCTION AU CALCUL DE PROBABILITES

M. R. REMITA

Université Badji Mokhtar, Annaba

Département de Médecine

1. INTRODUCTION

1. INTRODUCTION

Le calcul des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser des phénomènes aléatoires.Ils sont bien représentés par les jeux du hasard dont l'étude a initié le calcul des probabilités.

1. INTRODUCTION

Le calcul des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser des phénomènes aléatoires.Ils sont bien représentés par les jeux du hasard dont l'étude a initié le calcul des probabilités.
Un phénomène déterministe est un phénomène dont on peut prévoir le résultat.

1. INTRODUCTION

Le calcul des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser des phénomènes aléatoires.Ils sont bien représentés par les jeux du hasard dont l'étude a initié le calcul des probabilités.
Un phénomène déterministe est un phénomène dont on peut prévoir le résultat.
Les phénomènes aléatoires (non déterministes) sont des phénomènes dont on ne pas prévoir le résultat.
L'étude et la modélisation de tels phénomènes est le champs d'application du calcul de probabilité.

2. EVENEMENTS

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

2. EVENEMENTS

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lors du lancer de deux dés.

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lors du lancer de deux dés.
  $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble de Ω.

2. EVENEMENTS

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble de Ω.
D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et il existe différents types d'événements

- Ω est appelé ensemble fondamentale.

2. EVENEMENTS

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- L'ensemble Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle alors l'événement certain.

2. EVENEMENTS

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- L'ensemble Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle alors l'événement certain.
- L'événement $\{\omega\}$, constitué par un seul élément de Ω est appelé événement élémentaire.

2. EVENEMENTS

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- L'ensemble Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle alors l'événement certain.
- L'événement $\{\omega\}$, constitué par un seul élément de Ω est appelé événement élémentaire.
- L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun résultat possible, il est appelé événement impossible.

2. EVENEMENTS

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- L'ensemble Ω contient tous les résultats possibles, on l'appelle alors l'événement certain.
- L'événement $\{\omega\}$, constitué par un seul élément de Ω est appelé événement élémentaire.
- L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun résultat possible, il est appelé événement impossible.
- $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $card\,(A) \geq 2$ s'appelle événement composé.

Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.

3. OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement "A ou B" noté $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.

Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement "A ou B" noté $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.
- L'événement "A et B" noté $A \cap B$ se produit si et seulement si A et B se réalisent ensemble.

- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux événements sont incompatibles.

3. OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux événements sont incompatibles.
- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.

- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux événements sont incompatibles.
- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.
- La relation $A \subset B$ signifie que la réalisation de A entraine la réalisation de B.

Definition

On dit que les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ forment une famille complète si les A_i constituent une partition de Ω, c'est à dire si

3. OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Definition

On dit que les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ forment une famille complète si les A_i constituent une partition de Ω, c'est à dire si

a. les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset$

Definition

On dit que les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ forment une famille complète si les A_i constituent une partition de Ω, c'est à dire si

a les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset$

b ils couvrent tout l'espace $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

Definition

Soit Ω un ensemble fondamental fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

Definition

Soit Ω un ensemble fondamental fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

a $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Definition

Soit Ω un ensemble fondamental fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b $\mathbb{P}(A) \geq 0$ pour tout événement A.

Definition

c . $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,;\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Definition

c . $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,; \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

d . Si $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ est une suite dénombrable d'événements incompatibles deux à deux alors

Definition

c . $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,;\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

d . Si $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ est une suite dénombrable d'événements incompatibles deux à deux alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

4. PROBABILITE SUR UN ESPACE FINI

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On appelle espace probabilisé fini le triplet $\left(\Omega, \mathcal{P}\left(\Omega\right), \mathbb{P}\right)$.

Propriété

$\forall A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right), \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Propriété

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Remarque

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Theorem

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Theorem

$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

Propriété

Si $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$

Soit un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace sur lequel on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ en donnant les nombres $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ telle que

$$\forall i = 1, \cdots, n; p_i \geq 0; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Definition

On appelle probabilité uniforme l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \quad \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ \{\omega_i\} &\mapsto \frac{1}{n} \end{aligned}$$

5. PROBABILITE UNIFORME

Definition

On appelle probabilité uniforme l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \quad \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ \{\omega_i\} &\longmapsto \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Plus généralement on définit la probabilité $\mathbb{P}$ sous la forme suivante

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Example

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tel que $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ l'une des valeurs suivantes $0,5$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$.
2. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ l'une des valeurs suivantes $0,2$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B.)$

Example

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tel que $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ l'une des valeurs suivantes $0,5$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$.
2. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ l'une des valeurs suivantes $0,2$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap B.)$

Example

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Soit les événements $C = \{\text{Coeur}\}$, $F = \{\text{Figure}\}$ quelquesoit la couleur. Calculer $\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(F), \mathbb{P}(C \cap F)$ et $\mathbb{P}(C \cup F)$.

6.1. Introduction

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

Definition

Une variable aléatoire X, sur un ensemble fondamental Ω, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: qui a tout résultat possible de l'expérience, la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

Definition

Une variable aléatoire X, sur un ensemble fondamental Ω, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: qui a tout résultat possible de l'expérience, la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.

Example

1. Lancer 3 pièces de monnaie

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

Definition

Une variable aléatoire X, sur un ensemble fondamental Ω, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: qui a tout résultat possible de l'expérience, la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.

Example

1. Lancer 3 pièces de monnaie

$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

Definition

Une variable aléatoire X, sur un ensemble fondamental Ω, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: qui a tout résultat possible de l'expérience, la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.

Example

1. Lancer 3 pièces de monnaie
$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$
$X :=$ le nombre de Piles obtenu.

6.1. Introduction

Soit Ω un ensemble fondamental dont les éléments possibles ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément.

Definition

Une variable aléatoire X, sur un ensemble fondamental Ω, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$: qui a tout résultat possible de l'expérience, la variable aléatoire X fait correspondre un nombre.

Example

1. Lancer 3 pièces de monnaie

$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$

$X :=$ le nombre de Piles obtenu.

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.

$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.

$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$

$X :=$ le nombre de lancers nécessaire jusqu'à l'obtention d'un 6.

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.

$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$

$X :=$ le nombre de lancers nécessaire jusqu'à l'obtention d'un 6.

$X \in \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$
$X :=$ le nombre de lancers nécessaire jusqu'à l'obtention d'un 6.
$X \in \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

Example

3. Etudier le temps de survie d'une lampe

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$
$X :=$ le nombre de lancers nécessaire jusqu'à l'obtention d'un 6.
$X \in \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

Example

3. Etudier le temps de survie d'une lampe
$X :=$ le temps de survie de la lampe.

Example

2. Lancer 1 dé jusqu'à l'obtention d'un 6.
$\Omega = \{6, (1;6), (2;6), \cdots, (5;6), (1;1;6), \cdots (5;5;6), \cdots\}$
$X :=$ le nombre de lancers nécessaire jusqu'à l'obtention d'un 6.
$X \in \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

Example

3. Etudier le temps de survie d'une lampe
$X :=$ le temps de survie de la lampe.
$X \in \mathbb{R}_+$.

6.2. Variables aléatoires discrètes (v.a.d)

6.2. Variables aléatoires discrètes (v.a.d)

Definition

Une variable aléatoire X est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

6.2. Variables aléatoires discrètes (v.a.d)

Definition

Une variable aléatoire X est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

Definition

On appelle loi de probabilité (distribution ou fonction de masse) de X, qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ (ou $\{x_1, x_2, \cdots\}$), la fonction qui associe à chaque valeur x_i de X le nombre $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ telle que

6.2. Variables aléatoires discrètes (v.a.d)

Definition

Une variable aléatoire X est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

Definition

On appelle loi de probabilité (distribution ou fonction de masse) de X, qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ (ou $\{x_1, x_2, \cdots\}$), la fonction qui associe à chaque valeur x_i de X le nombre $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ telle que

1. $0 \leq p_i \leq 1$;

6.2. Variables aléatoires discrètes (v.a.d)

Definition

Une variable aléatoire X est dite discrète lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

Definition

On appelle loi de probabilité (distribution ou fonction de masse) de X, qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ (ou $\{x_1, x_2, \cdots\}$), la fonction qui associe à chaque valeur x_i de X le nombre $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ telle que

1. $0 \leq p_i \leq 1$;
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (ou $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$).

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

Definition

Une variable aléatoire X est dite absolument continue (ou continue) s'il existe une fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

Definition

Une variable aléatoire X est dite absolument continue (ou continue) s'il existe une fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

Definition

Une variable aléatoire X est dite absolument continue (ou continue) s'il existe une fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. f est continue par morceaux, sauf peut être en un nombre fini de valeurs,

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

Definition

Une variable aléatoire X est dite absolument continue (ou continue) s'il existe une fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. f est continue par morceaux, sauf peut être en un nombre fini de valeurs,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

6.3. Variables aléatoires absolument continues (v.a.c)

Definition

Une variable aléatoire X est dite absolument continue (ou continue) s'il existe une fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. f est continue par morceaux, sauf peut être en un nombre fini de valeurs,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Remarque

La fonction f s'appelle densité de probabilité de la v.a.c. X.

6.4. Fonction de répartition

6.4. Fonction de répartition

Definition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \begin{cases} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases} \end{aligned}$$

6.4. Fonction de répartition

Definition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \begin{cases} \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$;

6.4. Fonction de répartition

Definition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \begin{cases} \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x\longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

6.4. Fonction de répartition

Definition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \begin{cases} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
3. *Si* $a < b$, *on a* $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ $\left(= \int_a^b f(x)\,dx \text{ si } X \text{ est une v.a.c}\right)$.

6.5. Espérance mathématique et variance

6.5. Espérance mathématique et variance

Definition

On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X le nombre réel définit par :

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{i \geq 1} x_i \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases}$$

6.5. Espérance mathématique et variance

Definition

On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X le nombre réel définit par :

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{i\geq 1} x_i \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases}$$

Definition

On appelle moment d'ordre deux d'une variable aléatoire X le nombre réel définit par :

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \begin{cases} \sum_{i\geq 1} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ est une v.a.d} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx & \text{si } X \text{ est une v.a.c} \end{cases}$$

Definition

On appelle variance d'une variable aléatoire X le nombre réel positif définit par :

$$Var\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2.$$

Definition

On appelle variance d'une variable aléatoire X le nombre réel positif définit par :

$$Var\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 .$$

Example

On lance deux dés et on note X la valeur absolue de la différence des nombres obtenus sur les faces supérieures.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a. X.
2. Calculer F_X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var\left[X\right]$.

Solution

Les valeurs de X *sont :* $\{0,1,2,3,4,5\}$

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{6}$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

Solution

Les valeurs de X sont : $\{0,1,2,3,4,5\}$

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{6}$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{6}{36} & si \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{16}{36} & si \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{24}{36} & si \ 2 \leq x < 3 \\ \frac{30}{36} & si \ 3 \leq x < 4 \\ \frac{34}{36} & si \ 4 \leq x < 5 \\ 1 & si \quad 5 \leq x \end{cases} .$$

Solution

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i\geq 1} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= 0\frac{6}{36} + 1\frac{10}{36} + 2\frac{8}{36} + 3\frac{6}{36} + 4\frac{4}{36} + 5\frac{2}{36} \\
&= \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \approx 1,94,
\end{aligned}$$

Solution

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{i\geq 1} x_i^2 \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \\
&= 0\frac{6}{36} + 1\frac{10}{36} + 4\frac{8}{36} + 9\frac{6}{36} + 16\frac{4}{36} + 25\frac{2}{36} \\
&= \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83,
\end{aligned}$$

Solution

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{i\geq 1} x_i^2 \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \\
&= 0\frac{6}{36} + 1\frac{10}{36} + 4\frac{8}{36} + 9\frac{6}{36} + 16\frac{4}{36} + 25\frac{2}{36} \\
&= \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
Var\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 \\
&= \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324} \approx 2,05.
\end{aligned}$$

Example

Soit f la fonction définie sur R par :

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de k, f est une densité d'une v.a.c X.
2. Calculer F_X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var[X]$.

Solution

1. *On cherche d'abords* k *en résolvant l'équation* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Solution

1. *On cherche d'abords* k *en résolvant l'équation* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1 \iff \int_0^1 kx(1-x)\,dx = 1\\ &\iff k\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1\\ &\iff k\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = 1 \iff k = 6\end{aligned}$$

Solution

1. *On cherche d'abords* k *en résolvant l'équation* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1 \Longleftrightarrow \int_0^1 kx(1-x)\,dx = 1 \\ &\Longleftrightarrow k\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \\ &\Longleftrightarrow k\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = 1 \Longleftrightarrow k = 6\end{aligned}$$

Pour cette valeur on vérifie que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *et que* f *est continue sauf peut être en* 0 *et* 1.

Solution

2. *Si* $x < 0$ *alors* $F_X(x) = 0$

Solution

2. *Si* $x < 0$ *alors* $F_X(x) = 0$
   Si $0 \leq x < 1$ *alors* $F_X(x) = 6\int_0^x t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3$,

Solution

2. *Si* $x < 0$ *alors* $F_X(x) = 0$
   Si $0 \leq x < 1$ *alors* $F_X(x) = 6\int_0^x t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3$,
   Si $x \geq 1$ *alors* $F_X(x) = 1$.

Solution

2. $Si\ x < 0\ alors\ F_X(x) = 0$
   $Si\ 0 \leq x < 1\ alors\ F_X(x) = 6\int_0^x t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3,$
   $Si\ x \geq 1\ alors\ F_X(x) = 1.$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ 1 \leq x \end{cases}.$$

Solution

3.
$$\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx=\int_{0}^{1} 6x^{2}\left(1-x\right)dx=\frac{1}{2}.$$

Solution

3.

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx = \int_{0}^{1} 6x^{2}\left(1-x\right)dx = \frac{1}{2}.$$

et

$$\mathbb{E}\left[X^{2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2}f\left(x\right)dx = \int_{0}^{1} 6x^{3}\left(1-x\right)dx = \frac{3}{10}$$

Solution

3.

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right) dx = \int_{0}^{1} 6x^{2}\left(1-x\right) dx = \frac{1}{2}.$$

et

$$\mathbb{E}\left[X^{2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2} f\left(x\right) dx = \int_{0}^{1} 6x^{3}\left(1-x\right) dx = \frac{3}{10}$$

d'où

$$Var\left[X\right] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{20}.$$