Introduction au calcul de probabilités

Remita Mohamed Riad

Université Badji Mokhtar, Faculté des Sciences Médicales, Département de Médecine

2011-2012

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne
- Tirer sur une cible, ...

Definition
Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne
- Tirer sur une cible, ...

Definition
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne
- Tirer sur une cible, ...

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé

Definition

Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne
- Tirer sur une cible, ...

Definition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers des possible ou ensemble fondamental et le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé
- Lors du lancer de deux dés

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire,

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Il existe différents types d'événements

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Il existe différents types d'événements

- Ω est appelé ensemble fondamentale.

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Il existe différents types d'événements

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne sera réalisé que par un seul résultat de l'épreuve aléatoire, on le notera $\{\omega\}$ et ω est appelé éventualité.

Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition

Tout sous ensemble de Ω s'apelle événement.

Il existe différents types d'événements

- Ω est appelé ensemble fondamentale.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne sera réalisé que par un seul résultat de l'épreuve aléatoire, on le notera $\{\omega\}$ et ω est appelé éventualité.
- $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $card\,(A) \geq 2$ s'appelle événement composé.

Evénements

Alors dans le cas d'événements on pourra utiliser le langage ensembliste.
Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

Evénements

Alors dans le cas d'événements on pourra utiliser le langage ensembliste. Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.

Evénements

Alors dans le cas d'événements on pourra utiliser le langage ensembliste. Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement "A ou B" noté $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.

Evénements

Alors dans le cas d'événements on pourra utiliser le langage ensembliste. Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement "A ou B" noté $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.
- L'événement "A et B" noté $A \cap B$ se produit si et seulement si A et B se réalisent ensemble.

Evénements

Alors dans le cas d'événements on pourra utiliser le langage ensembliste. Si A et B sont deux événements liés à un expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement "A ou B" noté $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.
- L'événement "A et B" noté $A \cap B$ se produit si et seulement si A et B se réalisent ensemble.
- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux événements sont incompatibles.

Evénements

Evénements

- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.

Evénements

- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.
- Ω est l'événement certain car il se réalise toujours.

Evénements

- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.
- Ω est l'événement certain car il se réalise toujours.
- $\emptyset$ est l'événement impossible car il ne se réalise jamais.

Evénements

- L'événement "A non B" noté $A - B$ signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas.
- Ω est l'événement certain car il se réalise toujours.
- $\emptyset$ est l'événement impossible car il ne se réalise jamais.
- La relation $A \subset B$ signifie que la réalisation de B entraine la réalisation de A.

Probabilité sur un espace fini

Definition

Soit Ω un univers fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une Application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

Definition

Soit Ω un univers fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une Application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Probabilité sur un espace fini

Definition

Soit Ω un univers fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une Application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Probabilité sur un espace fini

Definition

Soit Ω un univers fini et non vide, une probabilité $\mathbb{P}$ est une Application de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0,1]$ telle que

a. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

c. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ est une suite dénombrable d'événements incompatibles deux à deux alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Probabilité sur un espace fini

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Probabilité sur un espace fini

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Propriété. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Probabilité sur un espace fini

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Propriété. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
Remarque : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Probabilité sur un espace fini

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Propriété. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
Remarque : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Theorem

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *on a* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Probabilité sur un espace fini

On appelle espace probabilisé fini le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Propriété. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
Remarque : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Theorem

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *on a* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Propriété. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Probabilité uniforme

Soit un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$.

Probabilité uniforme

Soit un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace sur lequel on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ en donnant les nombres $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$ telle que

$$\forall i = 1, \cdots, n; p_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Definition

On appelle probabilité uniforme l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ \omega_i & \longrightarrow & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Probabilité uniforme

Soit un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace sur lequel on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ en donnant les nombres $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$ telle que

$$\forall i = 1, \cdots, n; p_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Definition

On appelle probabilité uniforme l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ \omega_i & \longrightarrow & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Plus généralement on définit la probabilité $\mathbb{P}$ sous la forme suivante

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Examples

Exemple 1. Soient A et B deux événements d'un univers Ω tel que $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cup B)$ l'une des valeurs suivantes $0,2$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$
2. Choisir pour $\mathbb{P}(A \cap B)$ l'une des valeurs suivantes $0,2$ ou $0,8$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exemple 2. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Soit les événements C ={la carte tirée est un cœur}, F ={la carte tirée est une figure} quelquesoit la couleur.
Calculer $\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(F), \mathbb{P}(C \cap F)$ et $\mathbb{P}(C \cup F)$.

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) \ = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) \ = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) \; = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) \; = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2$.

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2$.
2. Comme $A \cap B \subset B$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2$.
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8.$
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2.$
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0,3$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2$.
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0,3$ d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$.

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) \ = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8.$
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) \ = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \ = 0,2.$
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \ = 0,3$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2.$
   $\mathbb{P}(A \cup B)$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$.
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2$.
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0,3$ d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$.
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8.$
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2.$
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0,3$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2.$
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,2$

Examples

Exemple 1. $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,3$

1. Comme $A \cup B \supset A \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 0,6$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8.$
   $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0,2.$
2. Comme $A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0,3$ d'où
   $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2.$
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,2$
   $\Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = 0,7.$

Exemple 2. $Card\left(\Omega\right) = 52$,

Examples

Exemple 2. $Card\,(\Omega) = 52$, $Card\,(C) = 13$

Examples

Exemple 2. $Card\,(\Omega) = 52$, $Card\,(C) = 13$ et $Card\,(F) = 12$.

Examples

Exemple 2. $Card\,(\Omega) = 52$, $Card\,(C) = 13$ et $Card\,(F) = 12$.
$\mathbb{P}\,(C)$

Exemple 2. $Card\left(\Omega\right) = 52$, $Card\left(C\right) = 13$ et $Card\left(F\right) = 12$.
$\mathbb{P}\left(C\right) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

Examples

Exemple 2. $Card\left(\Omega\right) = 52$, $Card\left(C\right) = 13$ et $Card\left(F\right) = 12$.

$\mathbb{P}\left(C\right) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

$\mathbb{P}\left(F\right) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;

Examples

Exemple 2. $Card\left(\Omega\right) = 52$, $Card\left(C\right) = 13$ et $Card\left(F\right) = 12$.

$\mathbb{P}\left(C\right) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

$\mathbb{P}\left(F\right) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;

$\mathbb{P}\left(C \cap F\right) = \frac{Card(C \cap F)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{52}$;

Examples

Exemple 2. $Card\left(\Omega\right)=52$, $Card\left(C\right)=13$ et $Card\left(F\right)=12$.

$\mathbb{P}\left(C\right) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

$\mathbb{P}\left(F\right) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$;

$\mathbb{P}\left(C \cap F\right) = \frac{Card(C \cap F)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{52}$;

$\mathbb{P}\left(C \cup F\right) = \mathbb{P}\left(C\right) + \mathbb{P}\left(F\right) - \mathbb{P}\left(C \cap F\right) = \frac{13+12-3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$.

Probabilité conditionnelle

Soit H un événement tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

Soit H un événement tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$. Pour tout événement A, on définit

$$\mathbb{P}(A/H) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

Probabilité conditionnelle

Soit H un événement tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$. Pour tout événement A, on définit

$$\mathbb{P}(A/H) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

appelée probabilité conditionnelle de l'événement A sachant H.

Probabilité conditionnelle

Soit H un événement tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$. Pour tout événement A, on définit

$$\mathbb{P}(A/H) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

appelée probabilité conditionnelle de l'événement A sachant H.

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et H un événement fixé tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}(./H)$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(./H) : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longrightarrow & \mathbb{P}(A/H) \end{array}$$

est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\varnothing/H\right) = 0,$

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\varnothing/H\right) = 0, \mathbb{P}\left(\Omega/H\right) = 1,$

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\emptyset/H\right) = 0, \mathbb{P}\left(\Omega/H\right) = 1$,et si $A \supset H, \mathbb{P}\left(A/H\right) = 1.$

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\varnothing/H\right)=0,\mathbb{P}\left(\Omega/H\right)=1$,et si $A\supset H,\mathbb{P}\left(A/H\right)=1$.
2. Soit $A_1,\cdots,A_i,\cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\emptyset/H\right)=0, \mathbb{P}\left(\Omega/H\right)=1$,et si $A\supset H, \mathbb{P}\left(A/H\right)=1$.
2. Soit $A_1, \cdots, A_i, \cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i/H\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_i/H\right).$$

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\emptyset/H\right)=0,\mathbb{P}\left(\Omega/H\right)=1$,et si $A\supset H,\mathbb{P}\left(A/H\right)=1$.
2. Soit $A_1,\cdots,A_i,\cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i/H\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_i/H\right).$$
3. Pour tout $A\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}/H\right)$

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}(./H)$ vérifie

1. $\mathbb{P}(\emptyset/H) = 0, \mathbb{P}(\Omega/H) = 1$,et si $A \supset H, \mathbb{P}(A/H) = 1$.
2. Soit $A_1, \cdots, A_i, \cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/H\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i/H).$$
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}/H\right) = 1 - \mathbb{P}(A/H)$.

L'application $\mathbb{P}(./H)$ vérifie

1. $\mathbb{P}(\emptyset/H) = 0, \mathbb{P}(\Omega/H) = 1$,et si $A \supset H, \mathbb{P}(A/H) = 1$.
2. Soit $A_1, \cdots, A_i, \cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/H\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i/H).$$
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}/H\right) = 1 - \mathbb{P}(A/H)$.
4. Pour tous $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\emptyset/H\right) = 0, \mathbb{P}\left(\Omega/H\right) = 1$,et si $A \supset H, \mathbb{P}\left(A/H\right) = 1$.
2. Soit $A_1, \cdots, A_i, \cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/H\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i/H\right).$$
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}/H\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A/H\right)$.
4. Pour tous $A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right)$ et $B \in \mathcal{P}\left(\Omega\right)$,si $A \subset B, \mathbb{P}\left(A/H\right) \leq \mathbb{P}\left(B/H\right)$.
5. Pour tous $A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right)$ et $B \in \mathcal{P}\left(\Omega\right)$,

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}\left(./H\right)$ vérifie

1. $\mathbb{P}\left(\emptyset/H\right)=0, \mathbb{P}\left(\Omega/H\right)=1$,et si $A\supset H, \mathbb{P}\left(A/H\right)=1$.
2. Soit $A_1,\cdots,A_i,\cdots$ une suite d'événements sont deux à deux disjoints,alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i/H\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_i/H\right).$$
3. Pour tout $A\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}/H\right)=1-\mathbb{P}\left(A/H\right)$.
4. Pour tous $A\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ et $B\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$,si $A\subset B, \mathbb{P}\left(A/H\right)\leq\mathbb{P}\left(B/H\right)$.
5. Pour tous $A\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$ et $B\in\mathcal{P}\left(\Omega\right)$,
$$\mathbb{P}\left(A\cup B/H\right)=\mathbb{P}\left(A/H\right)+\mathbb{P}\left(B/H\right)-\mathbb{P}\left(A\cap B/H\right).$$

Formule des probabilités totales

1. Si H est tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{H}) \neq 0$,

Formule des probabilités totales

1. Si H est tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{H}) \neq 0$,on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \mathbb{P}(A/H)\,\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}\left(A/\overline{H}\right)\mathbb{P}\left(\overline{H}\right).$$

2. Si $H_1, \cdots, H_n$ est une partition finie d'événements de Ω de probabilités non nulles,

Formule des probabilités totales

1. Si H est tel que $\mathbb{P}(H) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{H}) \neq 0$,on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \mathbb{P}(A/H)\,\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}\left(A/\overline{H}\right)\mathbb{P}\left(\overline{H}\right).$$

2. Si $H_1, \cdots, H_n$ est une partition finie d'événements de Ω de probabilités non nulles,alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A/H_i)\,\mathbb{P}(H_i).$$

Formule de Bayes

Soit A un événement de probabilité non nulle.

Formule de Bayes

Soit A un événement de probabilité non nulle.Si les événements H_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une partition de Ω et aucun $\mathbb{P}(H_i)$ n'est nul,

Formule de Bayes

Soit A un événement de probabilité non nulle.Si les événements H_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une partition de Ω et aucun $\mathbb{P}\left(H_i\right)$ n'est nul,on a pour tout $j = 1, \cdots, n$:

$$\mathbb{P}\left(Hj|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A/H_j\right)\mathbb{P}\left(H_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A/H_i\right)\mathbb{P}\left(H_i\right)}.$$

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Deux événements A et B de cet espace sont dits indépendants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Proposition *Si A et B sont indépendants, il en est de même pour les paires d'événements A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.*