Calculs de probabilités avec la loi normale

Olivier Torrès

20 janvier 2012

Rappels pour la licence EMO/IIES

Ce document au format PDF est conçu pour être visualisé en mode présentation. Sélectionnez ce mode ou le mode "plein écran" dans le menu de votre lecteur de PDF (Adobe Reader, Foxit Reader, Preview, Evince, etc)

Plan

Définition

Définition

X suit une loi normale s'il existe des réels μ et $\sigma > 0$ pour lesquels on peut écrire

$$\mathrm{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, \mathrm{d}x \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$

Propriétés

Propriété

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$*, alors*

- $\mathrm{E}(X) = \mu$ *et* $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$
- $\alpha X + \beta \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta; |\alpha|\sigma)$ *pour n'importe quels réels* $\alpha \neq 0$ *et* β
- X *est une v.a. continue :* $\mathrm{P}(X < a) = \mathrm{P}(X \leq a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Conséquences importantes du deuxième point $(\sigma > 0)$:

- $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma) \implies Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
  À partir de n'importe quelle loi normale, on peut se ramener à la loi $\mathcal{N}(0,1)$
- $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \implies X = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$
  À partir de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ on peut construire n'importe quelle loi normale

Plan

La fonction de densité

Définition

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors la densité de X est la fonction

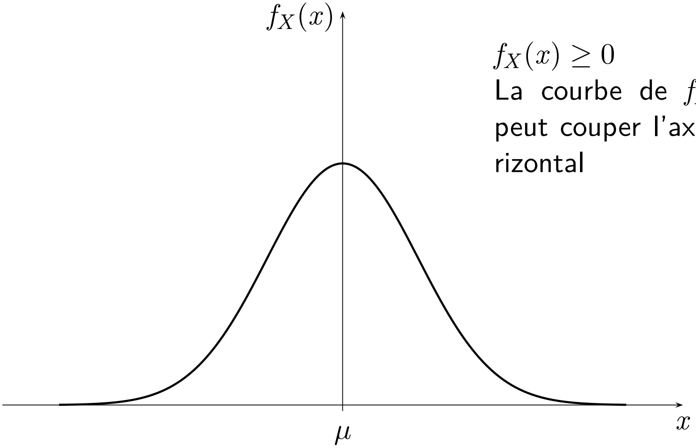
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Propriété

- $f_X(x) \geq 0$
- *f_X est symétrique autour de l'axe d'équation $x = \mu$; par conséquent $f_X(\mu + a) = f_X(\mu - a)$ pour tout réel a*
- *f_X possède un maximum unique en μ, égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$*
- *f_X possède deux points d'inflexion, en $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$*
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Graphe de f_X

Allure de la fonction de densité et illustration des propriétés de f_X

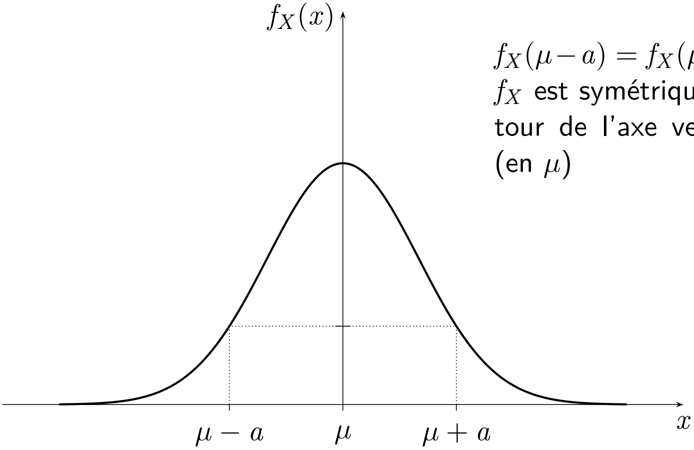


$f_X(x) \geq 0$

La courbe de f_X ne peut couper l'axe horizontal

Graphe de f_X

Allure de la fonction de densité et illustration des propriétés de f_X

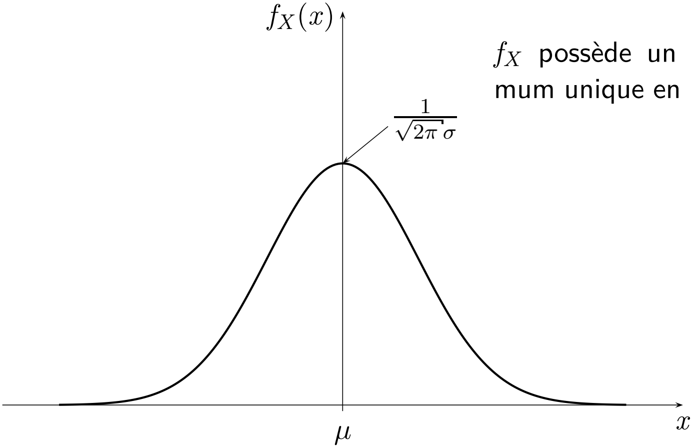


$f_X(\mu - a) = f_X(\mu + a)$

f_X est symétrique autour de l'axe vertical (en μ)

Graphe de f_X

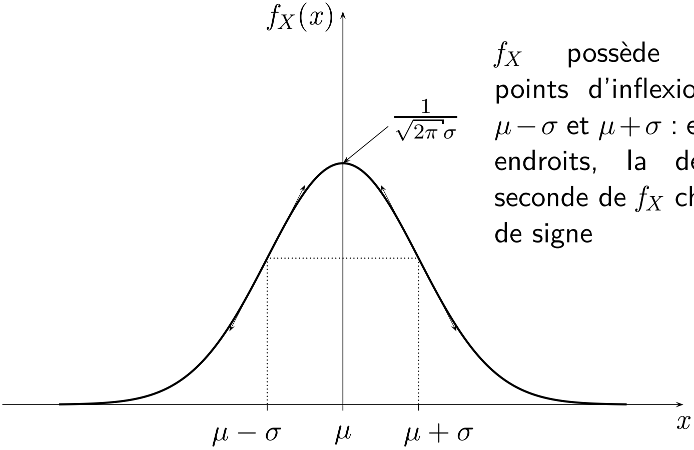
Allure de la fonction de densité et illustration des propriétés de f_X



f_X possède un maximum unique en $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

Graphe de f_X

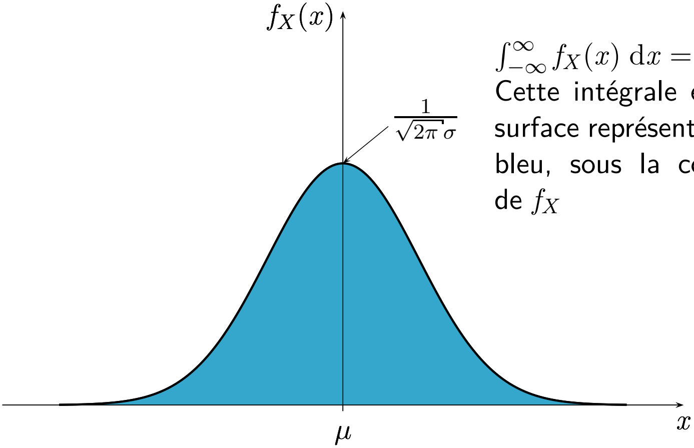
Allure de la fonction de densité et illustration des propriétés de f_X



f_X possède deux points d'inflexion en $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$: en ces endroits, la dérivée seconde de f_X change de signe

Graphe de f_X

Allure de la fonction de densité et illustration des propriétés de f_X



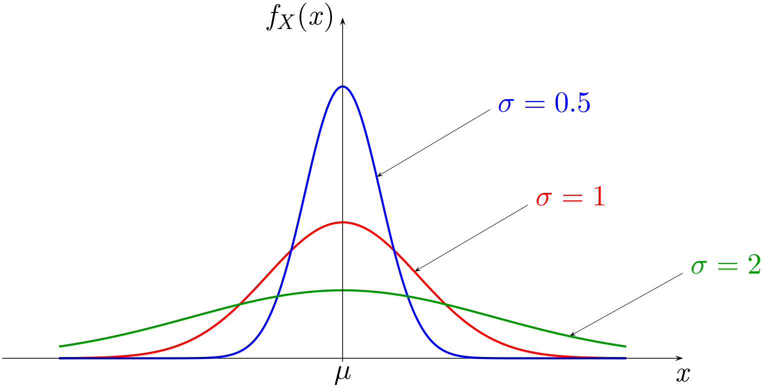
$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{d}x = 1$

Cette intégrale est la surface représentée en bleu, sous la courbe de f_X

Des constats immédiats (1)

- μ (l'espérance X) indique la position de la courbe de la densité f_X
- μ est l'unique mode de X (l'endroit où la densité est la plus haute)
- plus σ est grand, plus le maximum de f_X est bas et plus ses points d'inflexion sont éloignés de leur milieu μ ; autrement dit, plus σ est grand, plus la courbe de la densité f_X est aplatie.
  On peut illustrer graphiquement ce dernier point.

Des constats immédiats (2)



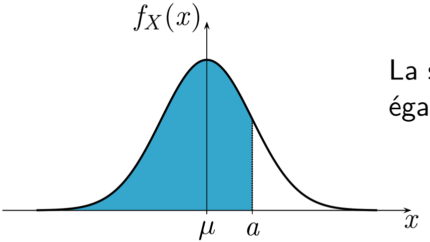
Plan

Les probabilités sont des surfaces

En utilisant la définition de la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ et de la densité f_X on a

$$\mathrm{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'intégrale du membre de droite est la surface sous la courbe de f_X entre $-\infty$ et a. On représente cette surface sur un graphique :



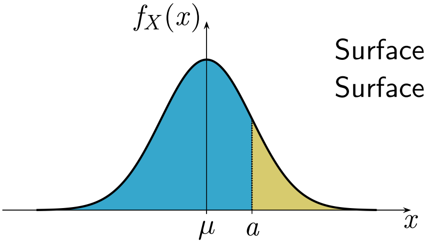
La surface en bleu est égale à $\mathrm{P}(X \leq a)$

Décomposition de la surface totale sous la courbe de densité f_X

Évidemment

$$P(X \leq a) + P(X > a) = 1$$

Le membre de droite est la surface totale sous la courbe de f_X. Le premier terme du membre de droite est la surface sous cette courbe entre $-\infty$ et a (à gauche de a). Donc $P(X > a)$ est la surface sous la courbe entre a et $+\infty$ (à droite de a). Graphiquement :



Surface (bleue) $= P(X \leq a)$

Surface (jaune) $= P(X > a)$

$\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ est aussi une surface

Rappel

Si a et b sont deux réels avec $b \leq a$ alors pour toute v.a. X on a

$$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X < b) \tag{2}$$

Si X est une v.a. continue, on peut permuter $\leq$ et $<$

$\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ est aussi une surface

Rappel

Si a et b sont deux réels avec $b \leq a$ alors pour toute v.a. X on a

$$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X < b) \tag{2}$$

Si X est une v.a. continue, on peut permuter $\leq$ et $<$

Relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ est aussi une surface

Rappel

Si a et b sont deux réels avec $b \leq a$ alors pour toute v.a. X on a

$$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X < b) \tag{2}$$

Si X est une v.a. continue, on peut permuter $\leq$ et $<$

Relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

En utilisant l'égalité (1), elle s'écrit aussi

$$\mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq b) + \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ est aussi une surface

Rappel

Si a et b sont deux réels avec $b \leq a$ alors pour toute v.a. X on a

$$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq a) - \mathrm{P}(X < b) \tag{2}$$

Si X est une v.a. continue, on peut permuter $\leq$ et $<$

Relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

En utilisant l'égalité (1), elle s'écrit aussi

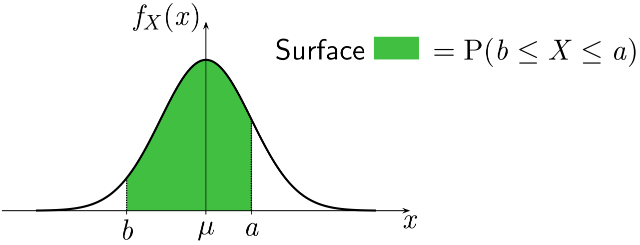
$$\mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq b) + \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

et avec l'égalité (2), on obtient

$$\mathrm{P}(b \leq X \leq a) = \int_{b}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

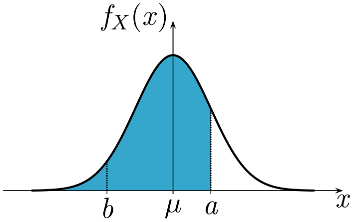
Représentation graphique de $\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ (1)

L'intégrale dans le membre de droite de l'égalité (3) est la surface sous la courbe de f_X entre b et a.
$\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ est donc égale à cette surface



Représentation graphique de $\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$ (2)

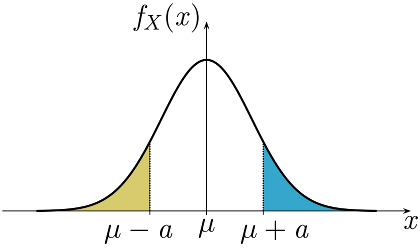
$$\mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(X \leq b) + \mathrm{P}(b \leq X \leq a)$$



Cas particulier : $\mathrm{P}(\mu - a \leq X \leq \mu + a)$

Comme f_X est symétrique autour de l'axe vertical d'équation $x = \mu$, on a pour tout réél a

$$\mathrm{P}(X \leq \mu - a) = \mathrm{P}(X \geq \mu + a)$$

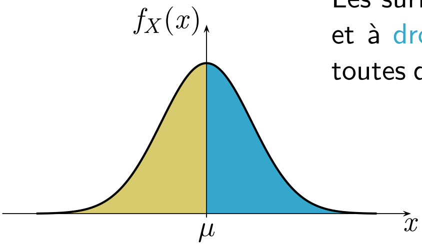


L'espérance est égale à la médiane : $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Me}(X) = \mu$

Lorsque $a = 0$, on obtient $\mathrm{P}(X \leq \mu) = \mathrm{P}(X \geq \mu)$. Comme $\mathrm{P}(X \leq \mu) + \mathrm{P}(X \geq \mu) = 1$, on a nécessairement :

$$\mathrm{P}(X \leq \mu) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(X \geq \mu)$$

μ est donc la médiane de X.



Les surfaces à gauche et à droite de μ sont toutes deux égales à $\frac{1}{2}$

Plan

1. Loi normale : définition et propriétés
2. Densité
3. Surfaces et probabilités
4. Calcul de probabilités liées à la loi normale : utilisation d'un tableur

Il suffit de savoir calculer $\mathrm{P}(X \leq a)$

Si on sait calculer les probabilités de la forme $\mathrm{P}(X \leq a)$ pour tout a dans $\mathbb{R}$, alors on sait calculer n'importe quelle probabilité concernant X. Quelques exemples :

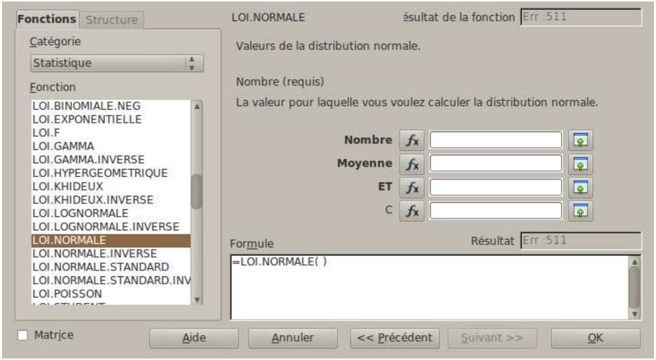
- $\mathrm{P}(X \geq a_1) = 1 - \mathrm{P}(X \leq a_1)$
- $\mathrm{P}(a_2 \leq X \leq a_3) = \mathrm{P}(X \leq a_3) - \mathrm{P}(X \leq a_2)$
- $\mathrm{P}(|X| \leq a_4) = \mathrm{P}(X \leq a_4) - \mathrm{P}(X \leq -a_4)$
- $\mathrm{P}(|X - a_5| \leq a_6) = \mathrm{P}(X \leq a_5 + a_6) - \mathrm{P}(X \leq a_5 - a_6)$

Pour calculer une probabilité comme $\mathrm{P}(X \leq a)$, on peut utiliser un tableur

Calcul de $\mathrm{P}(X \leq a)$ avec un tableur

La fonction `LOI.NORMALE(Nombre;Moyenne;ET;1)` retourne la valeur de $\mathrm{P}(X \leq \texttt{Nombre})$ lorsque $X \sim \mathcal{N}(\texttt{Moyenne}; \texttt{ET})$

Noter : le dernier argument de cette fonction est 1



Exemple

On spécifie la valeur de μ (`Moyenne`) et de σ (`ET`).

LOI.NORMALE | =LOI.NORMALE(A9;B$1;B$2;1)

	A	B	C	D
1	Moyenne (µ)	1		
2	ET (σ)	1,5		
3				
4	Nombre	P(X ≤ Nombre)		
5	-11,08	0,0000000000		
6	-4,87	0,0000455154		
7	-2,02	0,0220397869		
8	-1,43	0,0526161385		
9	0,21	=LOI.NORMALE(A9;B$1;B$2;1)		
10	0,96	0,4893627999		
11	1	0,5		
12	1,79	0,7007874563		
13	2,98	0,9065824910		
14	5,01	0,9962449208		
15	7	0,9999683288		
16	10,96	1,0000000000		

On remarque au passage que l'espérance 1 est bien la médiane : $\mathrm{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}$

Et la densité ?

On appelle la fonction `LOI.NORMALE(Nombre;Moyenne;ET;0)`
Noter : le dernier argument est `0` à présent.

LOI.NORMALE =LOI.NORMALE(A9;B$1;B$2;0)

	A	B	C	D
1	Moyenne (μ)	1		
2	ET (σ)	1,5		
3				
4	Nombre	Densité		
5	-11,08	0,0000000000		
6	-4,87	0,0001257151		
7	-2,02	0,0350437080		
8	-1,43	0,0716040501		
9	0,21	=LOI.NORMALE(A9;B$1;B$2;0)		
10	0,96	0,2658669730		
11	1	0,2659615203		
12	1,79	0,2315191864		
13	2,98	0,1112913612		
14	5,01	0,0074632881		
15	7	0,0000892202		
16	10,96	0,0000000001		

On remarque au passage l'illustration de la symétrie de la densité autour de l'espérance : elle a la même valeur en $0{,}21 = 1 - 0{,}79$ et en $1{,}79 = 1 + 0{,}79$