

Analyse dimensionnelle

O. Louisnard

21 septembre 2012

1 Introduction

La physique manipule des grandeurs s'exprimant toutes en fonction de grandeurs de base, qui sont au nombre de 7 :

Masse	M	kg
Longueur	L	m
Temps	T	s
Température	θ	K
Intensité électrique	I	A
Quantité de matière	N	mol
Intensité lumineuse	J	cd (candela)

Les équations manipulent a priori des grandeurs dites “dimensionnelles”, c'est-à-dire dont la valeur dépend du système d'unités choisi. L'intérêt de l'analyse dimensionnelle est d'exprimer les lois physiques ou les relations qui en dérivent en fonction de nombres sans dimension, c'est-à-dire sans unité. On s'affranchit ainsi du système d'unités choisi.

Remarque : le choix des 7 grandeurs ci-dessus est modifiable. On peut par exemple remplacer l'intensité électrique I par la charge Q , la masse M par la force F ou l'énergie E ou encore la puissance P ...

2 Equation aux dimensions

Plutôt que de parler d'unité d'une grandeur, on parlera de sa dimension, que l'on exprimera en fonction des 7 grandeurs ci-dessus. On note $[g]$ la dimension d'une grandeur g .

L'équation aux dimensions relie les dimensions de deux grandeurs. Par exemple si D est une longueur, on écrira $[D] = L$. on dit que D a la dimension d'une longueur ou est homogène à une longueur. Si v est une vitesse, on écrira $[v] = LT^{-1}$.

Les règles de base sont assez simples et intuitives :

- si A et B sont deux grandeurs, on ne peut écrire $A + B$, $A - B$ ou $A = B$ que si elles ont la même dimension,
- on a $[AB] = [A][B]$ et $[A/B] = [A]/[B]$,
- on a $[A^q] = [A]^q$. Le nombre q devrait normalement être un rationnel,
- l'argument d'une fonction est *toujours* sans dimension. Certaines lois empiriques, notamment en thermodynamique, ne respectent pas cette règle. Elle est pourtant fondamentale et évite des erreurs d'unités.
- la dimension d'une grandeur A est obligatoirement de la forme :

$$[G] = M^A L^b T^c \theta^d I^e N^f J^g$$

On trouvera par exemple en thermodynamique des corrélations du type :

$$\log_{10} p_S(T) = A + \frac{C}{T - T_0},$$

qui sont "dangereuses", au sens où A ne peut s'exprimer dans aucune unité. On est donc contraint de lui donner une valeur numérique en spécifiant bien en quelle unité est obtenu le résultat p_S .

D'autres corrélations sont correctes quant aux règles ci-dessus, mais mal écrites. Par exemple pour la corrélation $c_p = A + BT + CT^2 + DT^3 + E/T^2$, on voit clairement que les paramètres A , B , C , D et E ont une unité, qui conditionne l'unité dans laquelle est obtenu le résultat c_p . Ce type de corrélation peut de plus engendrer des erreurs numériques conséquentes, car T est une grandeur de l'ordre de 100, qui élevée au cube, sera ensuite toujours multiplié par un nombre très petit D . On aura toujours intérêt à écrire les corrélations de telle sorte que toutes les quantités évaluées soient du même ordre de grandeur (surtout dans les additions et les soustractions). La précédente relation pourrait être avantageusement remplacée par :

$$\frac{c_p}{c_{p_0}} = A + B \left(\frac{T}{T_0} \right) + C \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + D \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 + E \left(\frac{T_0}{T} \right)^2$$

D'autre part d'après la définition des dérivées, il est clair que :

$$\left[\frac{dA}{dx} \right] = \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right] = \frac{[A]}{[x]}$$

De même, pour les intégrales :

$$\left[\int A(x) dx \right] = [A][x] \quad \left[\iint \dots \int A(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] = [A][x_1][x_2] \dots [x_n]$$

Les dimensions des opérateurs de l'analyse vectorielle découlent de celle d'une dérivée partielle :

$$[\mathbf{grad} A] = [A]L^{-1} \quad [\mathbf{rot} V] = [\mathbf{div} V] = [V]L^{-1} \quad [\nabla^2 A] = [A]L^{-2}$$

Enfin, l'écriture de l'équation aux dimensions dans une EDO ou une EDP permet bien souvent d'identifier la dimension d'une grandeur physique. Par exemple, dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \nabla^2 u$$

l'équation aux dimensions s'écrit $[u]T^{-1} = [a][u]L^{-2}$, ce qui indique que, quelle que soit la grandeur u , on a toujours $[a] = L^2T^{-1}$ (ce type de grandeur est appelé coefficient de diffusion).

L'équation aux dimensions d'une EDO ou EDP permet bien souvent également d'identifier des temps ou des longueurs caractéristiques, sans résoudre l'équation. Par exemple, dans le cas d'une relaxation type circuit RC série :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = E$$

l'équation aux dimensions montre immédiatement que RC est forcément un temps, que l'on identifie aisément comme étant le temps de relaxation. De même l'équation aux dimensions de l'oscillateur :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

montre clairement que g/l est l'inverse d'un temps au carré, ce temps étant fatalement lié à la période d'oscillation.

Plus complexe, pour une EDP de convection-diffusion-réaction :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} u = D\nabla^2 u - ku$$

1. Quelles sont les dimensions de V , D et k ?
2. Mettre en évidence 3 temps caractéristiques du système physique représenté par cette équation.

3 Théorème de Π -Buckingham

3.1 Enoncé

Si n grandeurs physiques v_1, v_2, \dots, v_n sont liées par une relation

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0, \tag{1}$$

et font intervenir en tout m grandeurs de base ($1 \leq m \leq 7$),

alors il existe une relation entre $p = n - m$ grandeurs adimensionnelles $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$ construites à partir de v_1, v_2, \dots, v_n :

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p) = 0. \tag{2}$$

L'application pratique du théorème sera donnée un peu plus loin. Insistons dès maintenant sur la nécessité de bien choisir les variables de base. En oublier une ou en prendre une de trop rend le théorème inutilisable.

En particulier, on pensera à prendre dans les variables non seulement les données du problème, mais aussi ce qu'on cherche. Par exemple si l'on cherche la position x d'un mobile au cours du temps t , il faudra bien sûr prendre x et t dans la liste des variables.

Remarque 1 :

En général, on cherche à exprimer l'une des variables en fonction des autres :

$$v_1 = f(v_2, \dots, v_n), \quad (3)$$

auquel cas on obtient une relation de la forme :

$$\Pi_1 = g(\Pi_2, \dots, \Pi_p) \quad (4)$$

dans laquelle on s'arrangera pour que v_1 n'apparaisse que dans Π_1 .

Remarque 2 :

Dans le cas ($p = 1$) où il n'existe qu'un groupe adimensionnel Π_1 , le résultat se met sous la forme simple

$$\Pi_1 = C^{te} \quad (5)$$

3.2 Démonstration

On commence par écrire les n variables en fonction des m grandeurs de base, que nous notons $g_1, g_2 \dots g_m$, où les g_i appartiennent à l'ensemble $\{M, L, T, \theta, J, Q, N\}$:

$$\begin{cases} v_1 &= g_1^{a_{11}} g_2^{a_{21}} \dots g_m^{a_{m1}} \\ v_2 &= g_1^{a_{12}} g_2^{a_{22}} \dots g_m^{a_{m2}} \\ &\vdots \\ v_n &= g_1^{a_{n1}} g_2^{a_{n2}} \dots g_m^{a_{mn}} \end{cases} \quad (6)$$

Ecrivons un groupe Π à partir des variables v_1, \dots, v_n :

$$\Pi = v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_n^{b_n} \quad (7)$$

Ce groupe, pour être adimensionnel doit vérifier $[\Pi] = 1$, et on doit donc avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots \quad a_{1n}b_n = 0 \quad \text{bilan sur } g_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots \quad a_{2n}b_n = 0 \quad \text{bilan sur } g_2 \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots \quad a_{mn}b_n = 0 \quad \text{bilan sur } g_m \end{array} \right. \quad (8)$$

Il s'agit d'un système homogène de m équations linéaires à n inconnues. Séparons arbitrairement les m premières des $n - m$ dernières. On peut réécrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots \quad a_{1m}b_m = -(a_{1,m+1}b_{m+1} + \dots \quad a_{1n}b_n) \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots \quad a_{2m}b_m = -(a_{2,m+1}b_{m+1} + \dots \quad a_{2n}b_n) \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots \quad a_{mm}b_m = -(a_{m,m+1}b_{m+1} + \dots \quad a_{mn}b_n) \end{array} \right. \quad (9)$$

Si on fixe les $m - n$ variables $b_{m+1} \dots b_n$, il s'agit maintenant d'un système linéaire à m équations et m inconnues $b_1 \dots b_m$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{1,m+1}b_{m+1} + \dots \quad a_{1n}b_n) \\ \vdots \\ -(a_{m,m+1}b_{m+1} + \dots \quad a_{mn}b_n) \end{bmatrix} \quad (10)$$

et si la matrice A est de rang m (son déterminant est non nul), le système a une solution unique $b_1 \dots b_m$, une fois les $b_{m+1} \dots b_n$ fixés. Ces derniers sont dans un sous-espace vectoriel de dimension $n - m$, et on peut donc en choisir $n - m$ indépendants, chaque choix définissant un Π , ce qui démontre le théorème.

3.3 Aspect pratique

Comme vecteurs $(b_{m+1} \dots b_n)$, on choisira dans la pratique les vecteurs $[1, 0 \dots 0]$, $[0, 1 \dots 0]$, \dots $[0, 0 \dots 1]$ et on formera donc successivement les Π_i :

$$\Pi_1 = v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_m^{b_m} v_{m+1} \quad (11)$$

$$\Pi_2 = v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_m^{b_m} v_{m+2} \quad (12)$$

$$\vdots \quad (13)$$

$$\Pi_{n-m} = v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_m^{b_m} v_n \quad (14)$$

en s'arrangeant pour prendre dans les $v_{m+1} \dots v_n$ les variables qui nous intéressent.

De plus, nous avons vu qu'une condition fondamentale pour trouver une solution aux exposants $b_1, b_2 \dots b_m$, est que la matrice A soit de rang m . Qu'est-ce que cela signifie? Si cela n'était pas le cas, cela signifierait qu'il existe une combinaison linéaire nulle entre les lignes $L_1, L_2 \dots L_m$ de la matrice A , soit $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 +$

$\dots \alpha_m L_m = 0$. On voit alors d'après (6) que les variables $v_1, v_2 \dots v_m$ seraient liées par $v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m} = 1$, ce qui signifierait que ces variables forment un Π entre elles.

En résumé, pour que la matrice soit effectivement de rang m , on doit choisir les m variables de telle sorte qu'elles ne forment pas un Π entre elles.

La méthodologie générale est donc la suivante :

1. Lister toutes les n variables pertinentes du problème
2. Ecrire leurs dimensions et calculer m
3. Choisir m variables $v_1 \dots v_m$ **ne formant pas un Π entre elles**. Un critère de choix peut être de prendre les variables ayant les dimensions plus simples possibles (longueurs, temps), en prenant garde malgré tout de ne pas prendre par exemple 2 longueurs, 2 temps etc.
4. Former pour chaque $i = 1 \dots m - n$, $\Pi_i = v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_m^{b_m} v_{m+i}$
5. écrire que $[\Pi_i]$ est sans dimension.

3.4 Exemples

3.4.1 Chute d'un corps sans frottement

On considère un corps en chute libre, lâché avec une vitesse initiale v_0 d'une hauteur h , et l'on cherche le temps de chute t en fonction de h .

1. Les variables du problème sont h, v_0, t (ne pas oublier de prendre la variable que l'on veut calculer), la pesanteur g , et la masse m du corps. On a donc $n = 5$.
2. Leurs dimensions sont

$$[h] = L \quad [v_0] = LT^{-1} \quad [t] = T \quad [g] = L.T^{-2} \quad [m] = M$$

On a donc $m = 3$. Il y aura donc $p = 5 - 3 = 2$ groupes adimensionnels.

3. On choisit 3 variables de base. Il ne faut pas choisir celle que l'on cherche à relier, à savoir t et h . Les 3 restantes sont m, g et v_0 .
4. Les deux groupes Π s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= m^a g^b v_0^c t \\ \Pi_2 &= m^{a'} g^{b'} v_0^{c'} h \end{aligned}$$

5. On écrit $[\Pi_1] = M^0 L^0 T^0$. Or on a

$$[\Pi_1] = M^a L^{b+c} T^{-2b-c+1}$$

On a donc le système :

$$\begin{aligned}a &= 0 \\b + c &= 0 \\2b + c &= 1\end{aligned}$$

et on a donc $a = 0$ et $b = 1$ et $c = -1$. On a donc :

$$\Pi_1 = \frac{gt}{v_0}$$

On suit la même méthode pour Π_2 . On a

$$[\Pi_2] = M^{a'} L^{b'+c'+1} T^{-2b'-c'}$$

On a donc le système :

$$\begin{aligned}a' &= 0 \\b' + c' + 1 &= 0 \\-2b' - c' &= 0\end{aligned}$$

d'où $a' = 0$, $c' = -2$ et $b' = 1$, soit finalement :

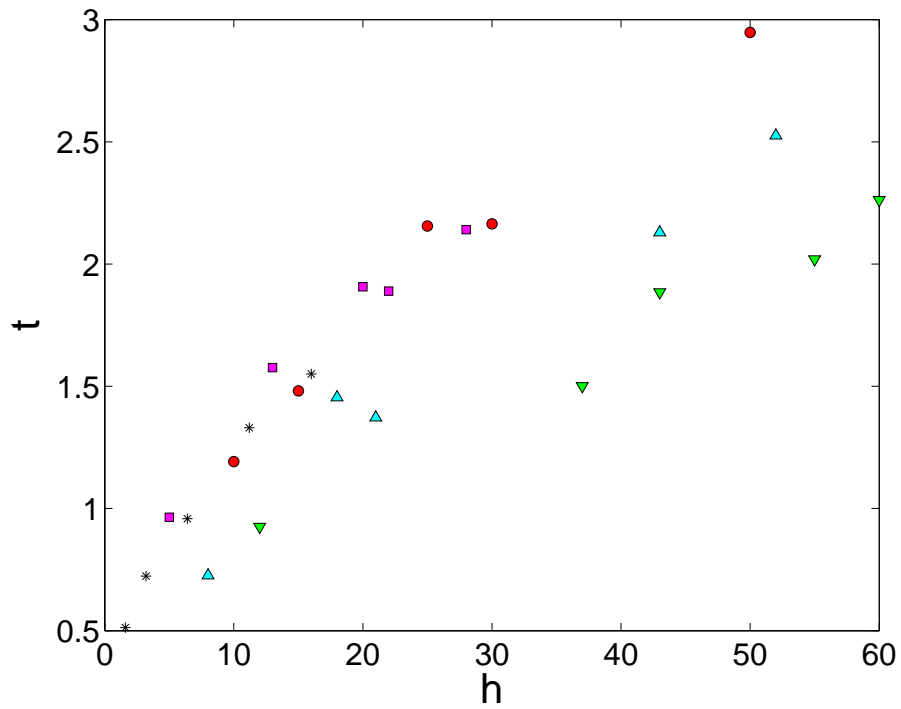
$$\Pi_2 = \frac{gh}{v_0^2}$$

On sait donc finalement que t s'exprimera en fonction de h sous la forme :

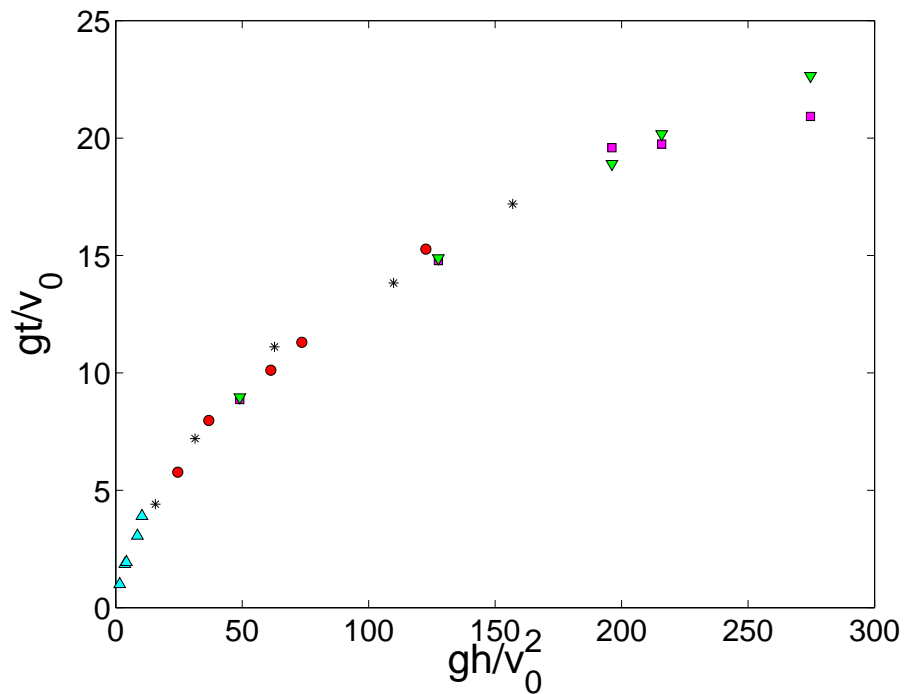
$$\frac{gt}{v_0} = f\left(\frac{gh}{v_0^2}\right)$$

On remarque que la masse m n'intervient pas dans le résultat, ce qui est bien connu en l'absence de frottement. Notons que le fait de l'avoir incluse a priori ne fournit pas un résultat faux, simplement cela nous a fait perdre du temps.

Voyons maintenant une application simple. Un industriel cherche à connaître le temps de chute d'un corps en fonction de la hauteur et de la vitesse initiale. Il y a deux paramètres à faire varier et pour identifier une loi $t = f(h, v_0)$, il faut raisonnablement au moins 5 valeurs pour chaque paramètre ce qui fait 25 expériences. Il charge cinq équipes de réaliser ces expériences, chacune avec une vitesse initiale différente. Le résultat des expériences est tracé ci-dessous.



Chaque symbole correspond à une vitesse initiale donnée. Le chef de projet est déçu et ne sait comment exploiter ces données. Un collègue lui suggère l'analyse dimensionnelle effectuée ci-dessus, et de tracer ensuite Π_1 en fonction de Π_2 :



On voit que, aux erreurs près, tous les points appartiennent à une même courbe. Il y a donc une fonction d'une variable à identifier, et non et une fonction de deux

variables. Un collègue ayant un peu d'expérience identifie cette fonction comme étant :

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x} - 1 \quad (15)$$

Le chef de projet est content. Il regrette juste d'avoir fait faire 25 expériences, alors qu'une demi-douzaine auraient suffi pour identifier la fonction.

3.4.2 Chute d'un corps sans frottement (bis)

On cherche une relation entre la hauteur h parcourue par le corps en chute libre et sa vitesse v .

C'est le même problème physique, mais ici le temps n'intervient plus, tout simplement parce qu'il ne nous intéresse pas en tant que tel. On a donc les mêmes variables que précédemment moins le temps, et toujours $m = 3$, on ne peut donc former qu'un groupe adimensionnel qui s'écrit par exemple :

$$\Pi = m^a g^b h^c v$$

(on remarque qu'on a exclu v des variables de base car c'est la grandeur qui nous intéresse). On obtient sans difficulté :

$$\Pi = \frac{v}{(gh)^{1/2}}$$

Dans des cas, où, comme ici, il n'y a qu'un seul Π , le résultat s'écrit simplement $\Pi = C^{\text{te}} = K$, et on a donc :

$$v = K\sqrt{gh}$$

résultat bien connu avec $K = \sqrt{2} \dots$

3.4.3 Déformation d'une bulle

Une bulle en ascension dans un fluide ou bien reste sphérique, ou bien se déforme en aplatissant sa face supérieure. On constate que plus les bulles sont rapides par rapport au liquide, moins elles sont stables. Trouver une valeur seuil sur un nombre adimensionnel au-delà de laquelle la bulle se déforme.

On sait que les déformations d'interfaces sont liées à la tension superficielle σ , dont la dimension est $[\sigma] = MT^{-2}$. La vitesse relative par rapport au fluide est identifiée comme paramètre actif. Avec un peu d'intuition, on se doute que la taille de la bulle R va influencer également. Enfin l'énergie de déformation est liée à l'énergie cinétique du fluide autour de la bulle et la masse volumique du fluide est donc un paramètre potentiellement influent. Enfin la déformation de la bulle est mesurée par une grandeur δ homogène à une longueur (qui mesure l'écart moyen à la sphère).

1. Les variables du problème sont σ , R , v , ρ et δ . On a donc $n = 5$.

2. Leurs dimensions sont

$$[\sigma] = MT^{-2} \quad [R] = L \quad [v] = LT^{-1} \quad [\rho] = ML^{-3} \quad [\delta] = L$$

On a donc $m = 3$. Il y aura donc $p = 5 - 3 = 2$ groupes adimensionnels.

3. On choisit 3 variables de base. Il ne faut pas choisir celle que l'on cherche à calculer, à savoir δ . On prend par exemple σ , R et ρ .

4. Les deux groupes Π s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \sigma^a R^b \rho^c \delta \\ \Pi_2 &= \sigma^{a'} R^{b'} \rho^{c'} v \end{aligned}$$

5. On écrit que Π_1 est adimensionnel. Donc

$$[\Pi_1] = M^{a+c} L^{b-3c+1} T^{-2a} = M^0 L^0 T^0$$

On obtient donc $a = c = 0$, $b = -1$ d'où

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{R}$$

On aurait pu s'attendre à ce résultat, la variable complémentaire δ ayant la même dimension que l'une des variables de base (ici R). Dans ce cas très fréquent, le Π correspondant s'obtient trivialement, et il est inutile de former le système. Pour Π_2 . On a

$$[\Pi_2] = M^{a'+c'} L^{b'-3c'+1} T^{-2a'-1} = M^0 L^0 T^0$$

On a donc le système :

$$\begin{aligned} a' + c' &= 0 \\ b' - 3c' + 1 &= 0 \\ -2a' - 1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où $a' = -1/2$, $b' = c' = -1/2$, soit finalement :

$$\Pi_2 = v \sqrt{\frac{\rho R}{\sigma}}$$

Donc on en déduit :

$$\frac{\delta}{R} = f \left(\sqrt{\frac{\rho R v^2}{\sigma}} \right)$$

On sait donc que la déformation relative de la bulle ne dépend que du nombre adimensionnel Π_2 . Le carré de ce dernier s'appelle nombre de Weber. Il mesure le rapport de l'énergie cinétique du fluide à l'énergie de déformation de la bulle. En pratique, la perte de symétrie sphérique au intervient-delà d'une valeur critique du nombre de Weber.

3.4.4 Refroidissement par un fluide en mouvement. Nombre de Nusselt

Pour refroidir les circuits électroniques, on les balaye par un courant d'air soufflé par un ventilateur à la vitesse v . On cherche à connaître la quantité de chaleur extraite par le courant d'air. L'inconnue du problème est donc \dot{Q} puissance thermique. Trouvez une relation générale entre un nombre adimensionnel faisant intervenir cette dernière et des nombres adimensionnels faisant intervenir les paramètres physiques pertinents du problème. On considérera un composant en forme de plaque de longueur L dans le sens de l'écoulement et de surface totale S .

Exprimez les nombres adimensionnels obtenus en fonction des nombres classiques suivants :

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{\dot{Q}L}{\lambda S \Delta T} && \text{nombre de Nusselt} \\ \text{Re} &= \frac{\rho v L}{\eta} && \text{nombre de Reynolds} \\ \text{Pr} &= \frac{\eta c_p}{\lambda} && \text{nombre de Prandtl} \\ \text{Ec} &= \frac{v^2}{c_p \Delta T} && \text{nombre d'Eckart} \end{aligned}$$

La quantité de chaleur dépend bien évidemment de la différence de température entre le corps à refroidir et le fluide ΔT . D'autre part, plus le fluide conduit la chaleur, plus l'échange sera grand, et la conductivité thermique λ du fluide intervient donc. Plus le fluide va vite, plus grand sera l'échange, donc v . La structure de l'écoulement dépend de la viscosité μ et de la masse volumique ρ du fluide. Enfin, la capacité thermique C_p du fluide représente son aptitude à emmagasiner de l'énergie pour un accroissement de température donné. L'échange s'effectue par la surface S du corps. Enfin, plus la longueur du corps influe sur la structure de l'écoulement via le développement d'une couche limite (l'influence de ce dernier paramètre est moins triviale mais fondamentale, et nécessite quelques connaissances de mécanique des fluides ...)

1. Les variables du problème sont \dot{Q} , ΔT , λ , v , μ , ρ , L , D , C_p . On a donc $n = 9$.
2. Leurs dimensions sont

$$\begin{aligned} [\dot{Q}] &= ML^2T^{-3} & [\Delta T] &= \theta & [\lambda] &= MLT^{-3}\theta^{-1} & [v] &= LT^{-1} & [\mu] &= ML^{-1}T^{-1} \\ & & & & [\rho] &= ML^{-3} & [L] &= [D] = L & [C_p] &= L^2T^{-2}\theta^{-1} \end{aligned}$$

On a donc $m = 4$. Il y aura donc $p = 9 - 4 = 5$ groupes adimensionnels.

3. On choisit 4 variables de base. On prend par exemple ρ , C_p , ΔT et L .

4. Les groupes quatre groupes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \rho^a C_p^b \Delta T^c L^d \dot{Q} \\ \Pi_2 &= \rho^a C_p^b \Delta T^c L^d \eta \\ \Pi_3 &= \rho^a C_p^b \Delta T^c L^d \lambda \\ \Pi_4 &= \rho^a C_p^b \Delta T^c L^d v \\ \Pi_5 &= \rho^a C_p^b \Delta T^c L^d S\end{aligned}$$

5. On écrit que Π_1 est adimensionnel :

$$[\Pi_1] = M^{a+1} L^{-3a+2b+d+2} T^{-2b-3} \theta^{-b+c} = M^0 L^0 T^0$$

Pour Π_1 , on obtient donc le système :

$$\begin{aligned}\text{M} : a + 1 &= 0 \\ \text{L} : -3a + 2b + d + 2 &= 0 \\ \text{T} : -2b - 3 &= 0 \\ \theta : -b + c &= 0\end{aligned}$$

de solution $a = -1$, $b = c = -3/2$, $d = -2$, et on obtient :

$$\Pi_1 = \frac{\dot{Q}}{\rho(c_p \Delta T)^{3/2} L^2}$$

Pour Π_2 , on obtient donc le système (on remarquera que le système a toujours la même matrice, seul le second membre change) :

$$\begin{aligned}\text{M} : a + 1 &= 0 \\ \text{L} : -3a + 2b + d - 1 &= 0 \\ \text{T} : -2b - 1 &= 0 \\ \theta : -b + c &= 0\end{aligned}$$

d'où $a = -1$, $b = c = -1/2$, $d = -1$, et donc :

$$\Pi_2 = \frac{\eta}{\rho(c_p \Delta T)^{1/2} L}$$

Pour Π_3 :

$$\begin{aligned}\text{M} : a + 1 &= 0 \\ \text{L} : -3a + 2b + d + 1 &= 0 \\ \text{T} : -2b - 3 &= 0 \\ \theta : -b + c - 1 &= 0\end{aligned}$$

d'où $a = -1$, $b = -3/2$, $c = -1/2$, $d = -1$, et donc :

$$\Pi_3 = \frac{\lambda}{\rho c_p^{3/2} \Delta T^{1/2} L}$$

Pour Π_4 :

$$\begin{aligned}\text{M} : a &= 0 \\ \text{L} : -3a + 2b + d + 1 &= 0 \\ \text{T} : -2b - 1 &= 0 \\ \theta : -b + c &= 0\end{aligned}$$

d'où $a = 0$, $b = c = -1/2$, $d = 0$, et donc :

$$\Pi_4 = \frac{v}{(c_p \Delta T)^{1/2}}$$

Enfin le 5ème Π est trivialement :

$$\Pi_5 = \frac{S}{L^2}$$

On en conclut que la quantité de chaleur extraite du composant peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\dot{Q}}{\rho(c_p \Delta T)^{3/2} L^2} = g \left(\frac{\eta}{\rho(c_p \Delta T)^{1/2} L}, \frac{\lambda}{\rho c_p^{3/2} \Delta T^{1/2} L}, \frac{v}{(c_p \Delta T)^{1/2}}, \frac{S}{L^2} \right) \quad (16)$$

Les nombres adimensionnels trouvés ici sont peu classiques, et moyennement intéressants car ils mélangent presque tous propriétés du fluide (ρ , c_p , λ) et l'écart de température ΔT . On vérifiera que l'on peut reconstruire aisément les nombres mentionnés au début du problème par :

$$\text{Nu} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2 \Pi_4} \quad \text{Re} = \frac{\Pi_3}{\Pi_1} \quad \text{Pr} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad \text{Ec} = \Pi_3^2$$

Le résultat est donc de la forme

$$\text{Nu} = g_2 \left(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Ec}, \frac{S}{L^2} \right) \quad (17)$$

soit :

$$\frac{\dot{Q} L}{\lambda S \Delta T} = g_2 \left(\frac{\rho v L}{\eta}, \frac{\eta c_p}{\lambda}, \frac{v^2}{c_p \Delta T}, \frac{S}{L^2} \right) \quad (18)$$

On s'intéresse, plutôt qu'à la puissance extraite \dot{Q} , au coefficient de transfert h qui donne la puissance extraite par unité de surface pour une différence de 1 degré entre le corps et l'air de refroidissement : $\dot{Q} = h S \Delta T$. On voit que le nombre de Nusselt n'est autre qu'une expression adimensionnelle de ce coefficient d'échange :

$$\text{Nu} = \frac{h L}{\lambda}$$

En général le rapport S/L^2 n'intervient pas directement. D'autre part, le nombre d'Eckart est lié à l'échauffement du fluide à cause du cisaillement visqueux (comme l'huile de lubrification par exemple), et est très faible dans ce problème. Il n'intervient donc pas dans le résultat.

La corrélation donnant le nombre de Nusselt (et donc le coefficient d'échange h est donc généralement de la forme :

$$\text{Nu} = g(\text{Re}, \text{Pr})$$

Le nombre de Reynolds caractérise l'écoulement, et le nombre de Prandtl est une propriété physique du fluide.

4 Exploitation expérimentale

Bien que la démarche de réduction du problème proposée par la méthode $\pi - Buckingham$ soit très intéressante, elle est loin de résoudre tous les problèmes.

Examinons dans le dernier exemple le résultat brut de l'analyse (16) : il implique encore une fonction de 4 variables. Faire varier ces 4 variables dans le cadre d'une campagne d'expérimentations est certes plus économique que faire varier les 9 variables initiales, mais c'est encore coûteux. De plus (mais on ne le sait pas forcément a priori), comme indiqué plus haut, le choix groupes adimensionnels pourrait être plus judicieux.

Ici, un peu d'astuce combinée à l'intuition peu permettre de simplifier la fonction g . Par exemple, le bon sens suggère que la puissance calorifique \dot{Q} est proportionnelle à ΔT . Il va donc tenter, comme nous l'avons fait de recombinaison les groupes pour obtenir un nombre en $\dot{Q}/\Delta T$, et s'arranger pour que ΔT n'intervienne que dans un autre nombre. C'est bien le cas dans (18)

Ensuite, fort de la nouvelle relation (18) il va voir sur sa campagne d'expérimentations que $\frac{\dot{Q}L}{\lambda S \Delta T}$ est très peu dépendant de ΔT , tout au moins dans une gamme de paramètres expérimentaux. Cela confirme son intuition initiale et lui permet d'éliminer le nombre Ec. Il reste donc une fonction de 3 variables, sous la forme :

$$\frac{\dot{Q}L}{\lambda S \Delta T} = g_2 \left(\frac{\rho v L}{\eta}, \frac{\eta c_p}{\lambda}, \frac{S}{L^2} \right) \quad (19)$$

Au passage il va aussi voir que $\frac{\dot{Q}L}{\lambda S \Delta T}$ est toujours indépendant de S/L^2 , ce qui lui permet d'éliminer S/L^2 . Il reste

$$\frac{\dot{Q}L}{\lambda S \Delta T} = g_2 \left(\frac{\rho v L}{\eta}, \frac{\eta c_p}{\lambda} \right) \quad \text{que nous écrivons} \quad \Pi'_3 = G(\Pi'_1, \Pi'_2) \quad (20)$$

Plus hasardeux mais à essayer : bien que rien ne le justifie, on peut suspecter ensuite que la fonction G est de la forme :

$$G(x, y) = x^a f(y)$$

On peut essayer de le vérifier en traçant $\log \Pi'_3$ en fonction de $\log \Pi'_1$ pour toutes les expérimentations. Si G est de la forme demandée, on aurait alors :

$$\log \Pi'_3 = a \log \Pi'_1 + \log(f(\Pi'_2))$$

Tous les groupes de points correspondant à des Π'_2 voisins devraient s'aligner sur une même droite, et on obtiendrait alors plusieurs droites parallèles.

Si l'essai est concluant, on identifie a en mesurant la pente des droites (quitte à refaire quelques expérimentations à Π'_2 constant). On trace alors $\Pi'_3/\Pi'_1{}^a$ en fonction de Π'_2 , et si l'hypothèse de départ est bonne, tous les points devraient s'aligner sur la même courbe, qui n'est autre que la fonction f . On peut même essayer de voir si f est une loi de puissance en traçant $\log(\Pi'_3/\Pi'_1{}^a)$ en fonction de $\log(\Pi'_2)$, au cas où.

Si la démarche échoue dès le début on peut essayer inversement $G(x, y) = f(x)y^b$ et recommencer l'analyse.

Notons justement que les corrélations $Nu = f(Re, Pr)$ sont souvent de la forme $Nu = KRe^aPr^b \dots$ donc ça vaut le coup d'essayer.

5 Conclusion

L'analyse dimensionnelle est souvent peu appréciée des étudiants qui n'y voient qu'un artifice de présentation un peu ésotérique, et restent attachés au mythe, en partie soutenu par le système éducatif, que tout problème physique est modélisable par des équations connues, dont la solution est trouvable, éventuellement au prix d'un calcul numérique. Même dans ce dernier cas, il faut considérer un calcul numérique comme une expérimentation (il est même parfois plus coûteux), qui en aucun cas ne permet de balayer continument l'espace des paramètres. Une réduction de ce dernier par l'analyse dimensionnelle est donc tout aussi indispensable dans ce cadre.

Le domaine de la mécanique des fluides et des transferts est attaché à cette discipline, le nombre de Reynolds en étant l'emblème le plus connu. Il suffira d'ailleurs au lecteur de parcourir un article scientifique dans ces domaines pour constater que le problème est toujours traité de façon adimensionnelle, que ce soit un travail théorique ou expérimental.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que l'analyse dimensionnelle était un bon réflexe, et que l'effort minime qu'elle implique peut être très fructueux. Nous l'encourageons à l'utiliser aussi souvent que possible, et à le promouvoir aussi largement que possible.